الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientfiique

المدرسة العليا للأساتذة بمستغانم
Ecole normale supérieure d'Enseignement de Mostaganem

قسم الرياضيات **Département de Mathématiques**

مذكرة تخرج لنيل شهادة أستاذ تعليم ثانوي-رياضيات-
تحت عنوان

المعادلات التفاضلية غير الخطية

من إعداد :

- شهرزاد إيمان
- ياسمين

الأستاذالمشرف :

- بار بشير

لجنة المناقشة

◄	أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة مستغانم	◄ ....
◄	أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة مستغانم	◄ ....
◄	أستاذ بالمدرسة العليا للأساتذة مستغانم	◄ ....

السنة الجامعية: 2021-2020

المحتويات

مقدمة

برنامج المعادلات التفاضلية للسنة الرابعة يهدف إلى إعطاء فكرة واضحة عن المعادلات التفاضلية، و لإبراز أهمية الحساب التفاضلي و التكاملي، و أيضا إلى حل المعادلات التفاضلية الخطية و غير الخطية (الوجود، الوحدانية، حساب الحلول). و إعطاء بعض التطبيقات. ينقسم الدرس إلى أربعة أجزاء هي

1. المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى
2. الآنظمة الخطية للمعادلات التفاضلية و طرق حلها
3. المعادلات التفاضلية من الرتبة االثانية و طرق حلها (لابلاس، السلاسل،..)
4. المعادلات التفاضلية الجزئية و بعض طرق حلها

باب 1

المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى

1.1 مفاهيم أساسية

نقدم فيما يلي بعض المفاهيم الأساسية حول المعادلات التفاضلية، حلولها، و الشروط الإبتدائية و الحدية.

تعريف 1

نسمي معادلة تفاضلية كل معادلة تربط بين المتغير المستقل x والدالة المجهولة $y(x)$ ومشتقاتها من الشكل

$$F\Big(x, y(x), y^{'}(x), .., y^{(n)}(x)\Big) = 0$$

مثال 1

المعادلات التالية هي معادلات تفاضلية

i) $y^{'} + xy = 0$ | iii) $y^{''} + \sin(y) = e^{x}$

ii) $y^{'} + e^{y} = 0$ | iv) $y^{'}y + (y^{'''})^{2} = 0$

تعريف 2

رتبة معادلة تفاضلية هي رتبة أعلى مشتقة تتضمنها المعادلة.

مثال 2

نستعمل المثال 1، رتبة كل معادلة هي بالترتيب

i) 1   iii) 2

ii) 1   iv) 3

تعريف 3

ليكن $I \subset \mathbb{R}$ مجال ، نقول عن دالة $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ أنها حل للمعادلة التفاضلية $F\left(x, y(x), y'(x), .., y^{(n)}(x)\right) = 0$ إذا كان،

1) y قابلة للإشتقاق n مرة على المجال I

2) y تحقق $F\left(x, y(x), y'(x), .., y^{(n)}(x)\right) = 0$ على المجال I.

مثال 3

1) $y(x) = e^x$ حل للمعادلة $y' = y$ على أي مجال $I \subset \mathbb{R}$.

2) $y(x) = \sin(x)$ حل للمعادلة $y'' + y = 0$ على أي مجال $I \subset \mathbb{R}$.

تعريف 4

الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة n هو حل يحتوي على n وسيط (ثوابت إختيارية)، أما الحل الخاص فهو حل لا يحتوي على أي وسيط.

مثال 4

1) الحل العام للمعادلة $y' = y$ هو $y(x) = ce^x$ مع $c \in \mathbb{R}$. إذا أخذنا $c = 0$ نحصل على الحل الخاص $y(x) = 0$.

2) الحل العام للمعادلة $y'' + y = 0$ هو $y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$ مع $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. إذا

أخذنا $c_1 = 0$ فإن الحل $y(x) = c_2 \sin(x)$ ليس خاص ولا عام.

1.1.1 الشروط الإبتدائية والشروط الحدية

لقد رأينا أن حلول المعادلات التفاضلية تتعلق بوسائط، لتحديد قيم هذه الوسائط يتم إظافة شروط على الدالة الحل، تنقسم هذه الشروط إلى نوعين نعرفهما فيما يلي:

تعريف 5: (الشرط الإبتدائي و الشرط الحدي)

1. لتكن لدينا معادلة معتبرة من أجل $x \in I$ رتبتها n، إذا حددة قيمة الدالة و مشتقاتها حتى الرتبة $n-1$ في نقطة $x_0 \in I$، نسمي هذه المعادلة مع هذا الشرط معادلة مع شرط إبتدائي أو مسألة القيمة الإبتدائية أو **مسألة كوشي** .
2. لتكن لدينا معادلة معتبرة من أجل $x \in I = [x_0, x_1]$، إذا حددنا قيمة الدالة أو مشتقاتها عند النقطتين x_0, x_1، نسمي هذه المعادلة مع هذا الشرط معادلة مع شرط حدي، أو مسألة القيمة الحدية.

مثال 5

1. المسائل التالية هي مسائل كوشي
$$(a)\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} y'' = -y+1 \\ y(1) = 1, \; y'(1) = 3. \end{cases}$$
2. المسائل التالية هي مسائل حدية
$$(a)\begin{cases} y'' = y, \quad x \in [0,\pi] \\ y(0) = y(\pi) = 0. \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} y'' = y, \quad x \in [0,\pi] \\ y(0) = 0, \; y'(\pi) = 1. \end{cases}$$

2.1.1 طرق عامة لحل المعادلات التفاضلية

فصل المتغيرات لنعتبر المعادلة من الشكل

$$y' g(y) = f(x) \tag{1}$$

حيث f, g دالتين معرفتين و مستمرتين على مجالين I, J على الترتيب.

إذا كانت F و G الدالتين الأصليتين ل f و g (على التوالي). أي $F(x)=\int f dx$ و $G(x)=\int g dx$، فإن الحل العام للمعادلة (1) يحقق

$$G(y)=F(x)+c, \quad c\in\mathbb{R}$$

المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى لنعتبر المعادلة من الشكل

$$y^{'}=a(x)y+b(x) \tag{2}$$

لدينا النظرية التالية حول المعادلة (2).

نظرية 1

لتكن $b(x), a(x)$ دالتين مستمرتين على $I\subseteq\mathbb{R}$، فإن

1. الحل العام للمعادلة (2) هو

$$y(x)=e^{\int a(x)dx}\left(c+\int b(x)e^{-\int a(x)dx}dx\right), \quad c\in\mathbb{R}$$

2. إذا أضفنا الشرط $y(x_0)=y_0$ ، فإن الحل وحيد يحقق

$$y(x)=e^{\int_{x_0}^{x}a(s)ds}\left(y_0+\int_{x_0}^{x}b(s)e^{-\int_{x_0}^{s}a(t)dt}ds\right).$$

برهان.

1. بضرب طرفي المعادلة $y^{'}=a(x)y+b(x)$ ب $\alpha(x)$ ($\alpha(x)$ نحددها فيما يلي)، نجد

$$\alpha y^{'}-\alpha a y=b\alpha \tag{3}$$

نبحث عن $\alpha(x)$ تحقق

$$(\alpha y)^{'}=\alpha y^{'}-\alpha a y \tag{4}$$

و هذا يعني أن $\alpha^{'}y=-ay\alpha$ (عامتا $y\neq 0$، ينتج $\alpha^{'}=-a\alpha$)، و منه

$$\alpha(x)=e^{-\int a(x)dx}$$

يسمى $\alpha(x)$ عامل المكاملة، بالتعويض في (3) و (4)، نجد

$$(\alpha y)^{'}=b\alpha=\alpha y^{'}-\alpha a y$$

و عليه

$$\alpha y = \int b\alpha \ dx + c, \ c \in \mathbb{R}$$

بالتعويض نجد

$$y(x) = e^{\int a(x)dx}\left(c + \int b(x)e^{-\int a(x)dx}dx\right).$$

2. يكفي تعويض الشرط الإبتدائي، أما وحدانية الحل، فنبرهن عليها فيما يأتي من الدرس.

■

مثال 6

1. لنعتبر المعادلة $yy' = (1+y^2)\frac{x}{2}$، بكتابة المعادلة على الشكل

$$\underbrace{y' \frac{2y}{(1+y^2)}}_{g(y)} = \underbrace{x}_{f(x)}$$

نلاحظ أن المتغيرين منفصلين، و هذا يعني أن أي حل يحقق:

$$\underbrace{\ln(1+y^2)}_{G(y)} = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{F(x)} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

2. لتكن المعادلة $y' = ky + h$، مع $y(0) = y_0$، حيث h, k ثابتين، فإن الحل حسب النظرية 1 هو

$$y(x) = e^{kx}\left(y_0 + \frac{h}{k}\right) - \frac{h}{k}$$

2.1 الوجود و الوحدانية

سنعتبر من الآن فصاعدا مسألة كوشي التالية

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{5}$$

نبدأ بالتوطئة التالية التي تعبر عن حل المعادلة التفاضلية بتكامل (أو بمعادلة التكاملية)،

توطئة 2

لتكن $f(\cdot,\cdot)$ و $y(\cdot)$ دالتين مستمرتين ، $y(\cdot)$ حل للمعادلة (5) إذا وفقط إذا

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(s, y(s)\big)ds, \quad \forall x. \tag{6}$$

برهان.

($\Leftarrow$) تكفي المكاملة.

($\Rightarrow$) نرى أنه إذا كان $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(s, y(s)\big)ds$، فإن $y(x_0) = y_0$، و بما أن f, y مستمرين فإن $f(s, y(s))$ مستمر أيضا، نطبق النظرية الأساسية في التحليل فنجد $y' = f(x, y)$. ■

1.2.1 طريقة التقريبات المتعاقبة (بيكارد-Picard)

طريقة بيكارد للتقريبات المتعاقبة هي طريقة تمكننا من إيجاد (تحت بعض الشروط) حلول مقربة لمسألة كوشي (5) بإستعمال الكتابة التكاملية في التوطئة السابقة بإعتبار متتالية التوابع

$$\begin{cases} y^{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(s, y^n(s)\big)ds, & n \geq 0 \\ y^0(x) = y_0. \end{cases} \tag{7}$$

نستطيع أن نرى أنه إذا تقاربت هذه المتتالية نحو دالة y، فإن y ستحقق المعادلة التكاملية (6)، سنبين تحت أي شروط تتقارب هذه المتتالية فيما يأتي، نعطي الأن مثالا على الطريقة.

6

نقول أن الدالة $f(x, y) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ تحقق شرط ليبشيتز (بالنسبة ل y) في المنطقة D إذا وجد $k \geq 0$ يحقق

$$\forall (x, y_1), (x, y_2) \in D, \quad \big|f(x, y_2) - f(x, y_1)\big| \leq k\big|y_2 - y_1\big|$$

يسمى k ثابت ليبشيتز للتابع f.

نقدم النظرية التالية حول تقارب متتالية التقريبات المتعاقبة للمسألة (5)،

3

لتكن f مستمرة على $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ و

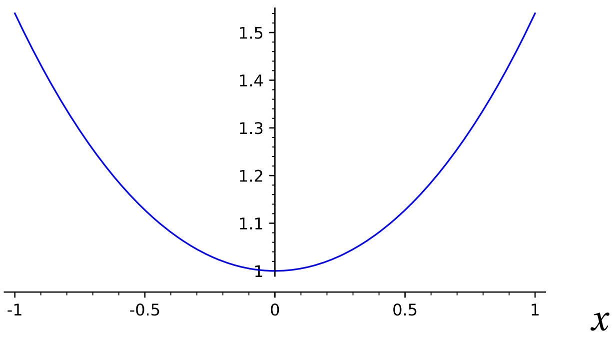
1. $M > 0$ يحقق $\sup_{(x,y)\in D} |f(x,y)| \le M$

2. f تحقق شرط ليبشيتز بالنسبة ل y بثابت k.

فإن

1. عناصر متتالية التقريبات المتعاقبة معرفة على المجال $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ تبقى داخل D، حيث $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$.

2. متتالية التقريبات المتعاقبة تتقارب نحو تابع مستمر.



شكل 1.1: بيان الدالة $f(x)$.

المصادر

[1] E. Boyce, C Diprima, Elementary Differential Equations. Wiley, 9 edition, 2008.

[2] Earl A. Coddington, Norman Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, Tata McGraw-Hill Publishing Company, New Delhi, 1972.

[3] R. K. Nagle, E B. Saff, A. D. Snider, Fundamentals of Differential Equations. Pearson, 2017.

[4] C. Moler, C. V. Loan, Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later. SIAM Rev. 45(1), 49-3 , 2003.

[5] E.J. Putzer, Avoiding the Jordan canonical form in the discussion of linear systems with constant coefficients, A merican Mathematical Monthly **73**(1966), .7-2

[6] D. Somasundaram, Ordinary Differential Equations: A First Course. Narosa Publishing House, 2001.

[7] M. A. Al-Gwaiz, Sturm-Liouville Theory and its Applications, Springer, 2007.

[8] J. W. Brown, R. V. Churchill, Fourier Series and Boundary value problems, McGraw-Hill, 8th ed, 2012.

[9] حسن مصطفى العويضي، المعادلات التفاضلية "الجزء الثاني"، مكتبة الرشد، 2015 .

الرموز

$\det(\cdot)$	المحدد
$\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$	مجموعة المصفوفات ذات البعد $n \times m$
$\mathscr{M}_{n}(\mathbb{R})$	مجموعة المصفوفات المربعة ذات البعد $n \times n$
I_n	مصفوفة الوحدة في $\mathscr{M}_{n}(\mathbb{R})$
A^t	منقول مصفوفة A
$J_\alpha(\cdot)$	دالة بسل من النوع الأول
$Y_n(\cdot)$	دالة بسل من النوع الثاني
$\Gamma(\cdot)$	
$\mathrm{erf}(\cdot)$	

الفهرس