Examen Parcial/Final

(2 pts) 1. Sea $\{X_n\}$ un proceso estacionario en covarianza con media cero, con función de covarianza $R_X(v)$ y función de densidad espectral $f_X(\omega), -\pi \leq \omega \leq \pi$.

$$Y_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X_{n-k} \quad .$$

Demuestre que la ... y....

$$\begin{aligned} f_Y(\omega) &= \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{ik\omega} \right|^2 f_X(\omega) \\ &= \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{ik\omega} \right|^2 f_X(\omega) \quad -\pi \leq \omega \leq \pi. \end{aligned}$$

(3 pts) 2. El puntaje puede ir antes del enunciado

3. Calcular la función de densidad espectral del proceso autorregresivo $\{X_n\}$ el cual satisface

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

(2 pts) • El puntaje puede ir por items

$$f(\omega) = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{ik\omega} \right|^2 f_X(\omega)$$

(3 pts) • donde $\{\xi_n\}$ y ademas... son todas menores que uno en valor absoluto.

$$f(\omega) = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{ik\omega} \right|^2 f_X(\omega)$$

Solución:

$$f(\omega) = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{ik\omega} \right|^2 f_X(\omega)$$

(5 pts) 4. Sea $\{X_n\}$ y $\alpha_0, \ldots, \alpha_q$ son reales y $\{\xi_n\}$, ademas de:

$$f(\omega) = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{ik\omega} \right|^2 f_X(\omega)$$

donde $z_1, \ldots, z_q$ son las q raíces de

$$f(\omega) = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{ik\omega} \right|^2 f_X(\omega)$$

(5 pts) 5. Sean $\{\xi_n\}$ variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con medias nulas y varianzas unitarias. Demostrar que todo proceso de media movil

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi\sigma_X^2} \prod_{j=1}^{q} \left| e^{i\lambda} - z_j \right|^2,$$

es ergódico. Supongamos que $\sum a_k^2 < \infty$. ¿Es lo mismo para $Y_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi_{n-k}$?.

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi\sigma_X^2} \prod_{j=1}^{q} \left| e^{i\lambda} - z_j \right|^2,$$