Lineare Algebra Mitschrieb

Maik Wild

October 27, 2014

Definition 2.2

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt injektiv, wenn keine zwei Elemente in X auf dasselbe Element in Y abgebildet werden, daher:
$\forall x, x \in X f(x) = f('x) \Rightarrow x = x'$
Dies ist äquivalent zu $\forall x, x' \in X : xeqx' \Rightarrow f(x)eqf(x')$
Die Abbildung f heißt surjektiv, wenn jedes $y \in Y$ ein Urbild x besitz, also $f(x) = y$; daher $f(x) = Y$ oder
$\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$.
Eine Abbildung, welche injektiv und surjektiv ist, heißt bijektiv.

$$Schaubild 1$$

Beispiel: Für jede nichtleere Menge X existiert die identische Abbildung
$\mathrm{id}_x : X \to X, x \mapsto x$ ist injektiv und surjektiv, also bijektiv.

Definition 2.3

Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to z$ Abbildungen. Dann heißt $g \circ f \;\; X \to Z x \mapsto g(f(x))$ die Komposition von g nach f.

Proposition 2.4

Es seien $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ und $h : Z \to W$ Abbildungen. Dann gilt
$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$
Beweis: *Hier beweis einfügen*

Definition 2.5

Es sei $f : X \to Y$ eine biektive Abbildung. Dann heißt die Abbildung
$f^{-1} : Y \to X, y = f(x) \mapsto x$ die zu f inverse Abbildung.

Bemerkung:
1) Obige Abbildungsvorschrift ist nur für bijetive Abbildungen erklärt
2) Es gelten $f^{-1} \circ f = id_x$ und $f \circ f{-1} = id_y$.
Sind X, Y Mengen so bezeichnet Abbildung (X, Y) die Menge aller Abbildungen von x nach y und $\mathrm{Bij}(X, Y)$ jene aller bijectiven Abbildungen, es gilt $\mathrm{Bij}(X, Y) \subseteq \mathrm{Abbildung}(X, Y)$.

I.3 Relationen

Definition 3.1

Eine Relation R auf Megen A und B ist eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$.
Man notiert aRb, falls $(a, b) \in R$ gilt, oder sogar $a \sim b, a \leq b$
Beispiel:
1) Auf $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}$ die Ordnungsrelation $(x \leq y)$
2) $A : A \to B$ definiert eine Relation $R_f(a, b) \in R_f \Leftrightarrow b = f(a)[R_f$ ist Graf von $A]$

Definition 3.2

Eine Relation $\sim$ auf X heißt Äquivalenzrelation, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Reflexivität: Für alle $x \in X$ gilt $x \sim x$.
(ii) Symetrie: Aus $x \sim y$ folgt $y \sim x$.
(iii) Transitivität: Aus $x \sim y$ und $y \sim z$ folgt $x \sim z$.

Für jedes $x \in X$ heißt $[x]_\sim = \{y \in X \mid y \in y\} \subseteq X$ die Äquivalenzklasse von x.
Die Menge der Äquivalenzklassen $X/\sim = \{[x]_\sim \mid x \in X\}$ nennt man Quotientenmenge von X nach $\sim$.
Die Abbildung $\pi_\sim : X \to X/\sim x \to [x]$ nennt man die Quotientenabbildung oder kanonische Projetion
Beispiel:
Es sei n $\in \mathbb{N}$. Auf $\mathbb{Z}$ wird eine Relation $\equiv_n$ wie folgt definiert: Es gilt genau dann $x \equiv_n y$, wenn n die Differenz $x - y$ teilt; daher wenn ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert mit $k \cdot n = x - y$.