TALLER

Señales y Sistemas

December 9, 2015

Autores:
Basulto Luis V-20.210.588
Daboin Yeitson V-21.258.579
Mendoza Ruben V-24.571.028
Ortega Raymar V-24.104.361

CONTENTS

1 Caracterización de Sistemas

Caracterizar el siguiente sistema:

$$y(t) = \cos(\omega t + \theta) + \int_{-\infty}^{t} \chi(\tau)\, d\tau \tag{1.1}$$

1.1 Linealidad

Para que el sistema sea lineal debe cumplir con el principio de superposición

$$f(t) = \alpha f_1(y) + \beta f_2(t) + ...\lambda f_n(t)$$

para ello definimos dos sistemas:

$$y_1(t) = \cos(\omega t + \theta) + \int_{-\infty}^{t} \chi_1(\tau)\, d\tau$$

$$y_2(t) = \cos(\omega t + \theta) + \int_{-\infty}^{t} \chi_2(\tau)\, d\tau$$

y una entrada:

$$\chi_3(\tau) = \alpha\chi_1(\tau) + \beta\chi_2(\tau) \tag{1.2}$$

donde debe cumplirse:

$$y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

para:

$$y_3(t) = \cos(\omega t + \theta) + \int_{-\infty}^{t} \chi_3(\tau)\, d\tau \tag{1.3}$$

sustituyendo (1.2) en (1.3)

$$y_3(t) = \cos(\omega t + \theta) + \int_{-\infty}^{t} (\alpha\chi_1(\tau) + \beta\chi_2(\tau))d\tau$$

procedemos a calcular:

$$y_3(t) = \cos(\omega t + \theta) + \int_{-\infty}^{t} \alpha\chi_1(\tau)\, d\tau + \int_{-\infty}^{t} \beta\chi_2(\tau)\, d\tau$$

se demuestra entonces que el sistema ***no es lineal.***

1.2 Invarianza

para demostrar si el sistema es invariante en el tiempo definimos una entrada desplazada:

$$y^*(t) = \cos(\omega t + \theta) + \int_{-\infty}^{t} \chi_1(\tau - \Lambda)\, d\tau$$

y una salida deplazada:

$$y(t - \Lambda) = \cos[\omega(t - \lambda) + \theta] + \int_{-\infty}^{t-\Lambda} \chi_1(\tau - \Lambda)\, d\tau$$

donde debe cumplirse que:

$$y^*(t) = y(t - \Lambda)$$

por lo tanto el sistema es ***variante en el tiempo.***

1.3 MEMORIA

A.Oppenheim

> "Un sistema es con memoria cuando existe almacenamiento de los valores pasados de la entrada y salida."

Todos los Sistemas que contengan un almacenador o un Sumador son con memoria.Por lo tanto el sistema es ***con memoria.***

1.4 ESTABILIDAD

A. Oppenheim

> "Un sistema es estable cuando para entradas acotadas, su salida tambien es acotada."

Para demostrar, definimos una entrada acotada:

$$\chi_1(\tau) = \mu(t) \tag{1.4}$$

y la sustituimos en (1.1) quedando:

$$y(t) = \cos(\omega t + \theta) + \int_{-\infty}^{t} \mu(\tau)\, d\tau \tag{1.5}$$

Resolviendo la integral, resulta:

$$y(t) = \cos(\omega t + \theta) + r(t) \tag{1.6}$$

dando como resultado una salida no acotada, por lo tanto el sistema ***no es estable.***

1.5 CAUSALIDAD

A. Oppenheim

> "Un sistema es causal cuando la salida en cualquier instante de tiempo depende sólo de valores del presente y pasado."

para demostrar la causalidad de este sistema, realizamos un pequeño muestreo, quedando:

$$y(1) = \cos(\omega 1 + \theta) + \int_{-\infty}^{1} \chi(\tau)\, d\tau \tag{1.7}$$

$$y(2) = \cos(\omega 2 + \theta) + \int_{-\infty}^{2} \chi(\tau)\, d\tau \tag{1.8}$$

$$y(3) = \cos(\omega 3 + \theta) + \int_{-\infty}^{3} \chi(\tau)\, d\tau \tag{1.9}$$

$$y(4) = \cos(\omega 4 + \theta) + \int_{-\infty}^{4} \chi(\tau)\, d\tau \tag{1.10}$$

para cualquier función de entrada, el sistema solo dependerá de valores del pasado y presente, por lo tanto el sistema ***es causal.***

1.6 Invertibilidad

A. Oppenheim

"Un sistema es invertible si para entradas distintas se producen salidas distintas."

Procedemos a introducir entradas para muestrear el sistema, con valores fijos para:

$$\theta = \frac{\pi}{3} \quad y \qquad \omega = 1000f$$

para una entrada como la del item (1.4):

$$y(t) = \cos\left(1000t + \frac{\pi}{3}\right) + \int_{-\infty}^{t} \mu(\tau)\, d\tau$$

resulta:

$$y(t) = \cos\left(1000t + \frac{\pi}{3}\right) + r(\tau)$$

probamos con otra entrada:

$$y(t) = \cos\left(1000t + \frac{\pi}{3}\right) + \int_{-\infty}^{t} r(\tau)\, d\tau$$

resulta:

$$y(t) = \cos\left(1000t + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{r^2(\tau)}{2}$$

una tercera entrada:

$$y(t) = \cos\left(1000t + \frac{\pi}{3}\right) + \int_{-\infty}^{t} C d\tau$$

resultando:

$$y(t) = \cos\left(1000t + \frac{\pi}{3}\right) + C\tau(\tau)$$

evaluando cada una de estas respuestas de $-\infty$ a t
Resulta que ***el sistema no es invertible.***

2 Sistemas LTI

2.1 Ecuación en diferencia

$$y[n] - \frac{5}{6}y[n-1] - \frac{1}{6}y[n-2] = \frac{1}{3}x[n] \tag{2.1}$$

Existen dos metodos para su resolución:

- Método Analítico: $y[h] = y_h[h] + y_p[h]$
- Método Recursivo: $y[n] = \frac{1}{3}x[n] + \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2]$

Dado el siguiente sistema descrito por la ecuación en diferencia determinar:

2.1.1 Respuesta al impulso del sistema

Procedemos a calcular por el método Analítico.
se define como:

$$y[h] = y_h[h] + y_p[h] \tag{2.2}$$

una solución homogénea mas una solución particular, donde:

$$y_h[h] = \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0 \qquad\qquad y_p[h] = 0$$

para este caso solo existe solución homogénea, entonces:

$$y[n] = z^n \tag{2.3}$$

sustituyendo (2.3) en (2.1)

$$z^n - \frac{5}{6}z^{n-1} - \frac{1}{6}z^{n-2} = 0$$

factor común z^{n-2} resulta:

$$z^2 - \frac{5}{6}z - \frac{1}{6} = 0 \ \text{ Polinomio Característico}$$

calculando las raíces del polinomio:

$$\left\{ \begin{matrix} z_1[n] = \frac{-1}{6} \\ z_2[n] = 1 \end{matrix} \right\}$$

entonces:

$$y[h] = C_1\left(\frac{-1}{6}\right)^n + C_2(1)^n \tag{2.4}$$

suponemos que el sistema está relajado para el cálculo de las condiciones iniciales:

$$y[n] - \frac{5}{6}y[n-1] - \frac{1}{6}y[n-2] = \frac{1}{3}\delta[n] \tag{2.5}$$

para n=0

$$y[0] = \frac{1}{3}$$

para n=1

$$y[1] - \frac{5}{6}y[0] = \frac{1}{3}\delta[1]$$

$$y[1] = \frac{5}{18}$$

procedemos a evaluar en (2.4) para n=0 y n=1

$$\begin{cases} y[0] & = C_1\left(\frac{-1}{6}\right)^0 + C_2(1)^0 \\ y[1] & = C_1\left(\frac{-1}{6}\right)^1 + C_2(1)^1 \end{cases}$$

Sustituimos las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} \frac{1}{3} & = C_1 + C_2 \\ \frac{5}{18} & = C_1 \left(\frac{-1}{6}\right) + C_2 \end{cases}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} C_1 & = \frac{1}{24} \\ C_2 & = \frac{7}{24} \end{cases}$$

finalmente sustituyendo los valores en la ecuación (2.4) ***la respuesta al impulso es:***

$$y[h] = \left\{ \frac{1}{24} \left(\frac{-1}{6} \right)^n + \frac{7}{24} (1)^n \right\} \mu(n) \qquad \text{para n} \geq 0$$

2.1.2 Salida del Sistema para una entrada x(n)= μ[n]-μ[n-6]

Calculamos por el método analítico:
La solución está definida como:

$$y[h] = y_h[h] + y_p[h] \tag{2.6}$$

una solución homogénea mas una solución particular.
donde:

$$y_h[h] = \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0 \qquad y_p[h] = K\left[\mu(n) - \mu(n-6)\right]$$

Para este caso si existe solución particular.
La solución homegénea sa calcula como en el item 2.1.1

$$y[n] = z^n \tag{2.7}$$

sustituyendo:

$$z^n - \frac{5}{6} z^{n-1} - \frac{1}{6} z^{n-2} = 0$$

factor común z^{n-2} resulta:

$$z^2 - \frac{5}{6} z - \frac{1}{6} = 0 \ \text{ Polinomio Característico}$$

calculando las raíces del polinomio son:

$$\begin{Bmatrix} z_1[n] = \frac{-1}{6} \\ z_2[n] = 1 \end{Bmatrix}$$

entonces:

$$y[h] = C_1 \left(\frac{-1}{6} \right)^n + C_2 (1)^n + K\left[\mu(n) - \mu(n-6)\right] \tag{2.8}$$

calculamos la respuesta particular, sustituyendo en (2.1) $y[n] = K\left[\mu(n) - \mu(n-6)\right]$

$$K\left[\mu(n) - \mu(n-6)\right] - \frac{5}{6}K\left[\mu(n-1) - \mu(n-7)\right] - \frac{1}{6}K\left[\mu(n-2) - \mu(n-8)\right] = \frac{1}{3}\left[\mu(n) - \mu(n-6)\right] \tag{2.9}$$

realizamos un muestreo para calcular el valor de K.
teniendo en cuenta que la función escalón existe a partir de n=0 para n=0

$$K\left[\mu(0) - \mu(-6)\right] - \frac{5}{6}K\left[\mu(-1) - \mu(-7)\right] - \frac{1}{6}K\left[\mu(-2) - \mu(-8)\right] = \frac{1}{3}\left[\mu(0) - \mu(-6)\right]$$

$$K = \frac{1}{3}$$

para n=1

$$K\left[\mu(1) - \mu(-5)\right] - \frac{5}{6}K\left[\mu(0) - \mu(-6)\right] - \frac{1}{6}K\left[\mu(-1) - \mu(-7)\right] = \frac{1}{3}\left[\mu(1) - \mu(-5)\right]$$

$$K - \frac{5}{6}K = \frac{1}{3}$$
$$K = 2$$

para n=2

$$K\left[\mu(2) - \mu(-4)\right] - \frac{5}{6}K\left[\mu(1) - \mu(-5)\right] - \frac{1}{6}K\left[\mu(0) - \mu(-6)\right] = \frac{1}{3}\left[\mu(2) - \mu(-4)\right]$$

$$K - \frac{5}{6}K - \frac{1}{6}K = \frac{1}{3}$$
$$K(0) = \frac{1}{3} \to K \to \infty$$

el valor de K queda indeterminado

para $n \geq 2$ **K no existe.**

Concluimos entonces que este no es el método indicado para calcular la respuesta al sistema para una entrada x(n)= μ[n]-μ[n-6].

Calculamos por el método Recursivo:

$$y[n] = \frac{1}{3}x[n] + \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2]$$

sustituyendo la entrada:

$$y[n] = \frac{1}{3}\left[\mu[n] - \mu[n-6]\right] + \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] \tag{2.10}$$

Muestreando: Sistema relajado.

n=0

$$y[0] = \frac{1}{3}\left[\mu[0]\right] + \frac{5}{6}y[-1] + \frac{1}{6}y[-2]$$

$$y[0] = \frac{1}{3} \approx 0,33$$

para n=1

$$y[1] = \frac{1}{3}\left[\mu[1]\right] + \frac{5}{6}y[0] + \frac{1}{6}y[-1]$$

$$y[1] = \frac{1}{3} + \frac{5}{6} * 0,33$$

$$y[1] = 0.608$$

para n=2

$$y[2] = \frac{1}{3}\left[\mu[2]\right] + \frac{5}{6}y[1] + \frac{1}{6}y[0]$$

$$y[2] = \frac{1}{3} + \frac{5}{6} * 0,608 + \frac{1}{6} * 0,33$$

$$y[2] = 0,895$$

para n=3

$$y[3] = \frac{1}{3}\left[\mu[3]\right] + \frac{5}{6}y[2] + \frac{1}{6}y[1]$$

$$y[3] = \frac{1}{3} + \frac{5}{6} * 0,895 + \frac{1}{6} * 0,608$$

$$y[3] = 1,1805$$

para n=4

$$y[4] = \frac{1}{3}\left[\mu[4]\right] + \frac{5}{6}y[3] + \frac{1}{6}y[2]$$

$$y[4] = \frac{1}{3} + \frac{5}{6} * 1,1805 + \frac{1}{6} * 0,895$$

$$y[4] = 1,46625$$

para n=5

$$y[5] = \frac{1}{3}\left[\mu[5]\right] + \frac{5}{6}y[4] + \frac{1}{6}y[3]$$

$$y[5] = \frac{1}{3} + \frac{5}{6} * 1,46625 + \frac{1}{6} * 1,1805$$

$$y[5] = 1,75196$$

para n=6

$$y[6] = \frac{1}{3}\left[\mu[6] - \mu[0]\right] + \frac{5}{6}y[5] + \frac{1}{6}y[4]$$

$$y[6] = \frac{5}{6} * 1,75196 + \frac{1}{6} * 1,46625$$

$$y[6] = 1,70434$$

para n=7

$$y[7] = \frac{1}{3}\left[\mu[7] - \mu[1]\right] + \frac{5}{6}y[6] + \frac{1}{6}y[5]$$
$$y[7] = \frac{5}{6} * 1,70434 + \frac{1}{6} * 1,75196$$
$$y[7] = 1,71228$$

para n=8

$$y[8] = \frac{1}{3}\left[\mu[8] - \mu[2]\right] + \frac{5}{6}y[7] + \frac{1}{6}y[6]$$
$$y[8] = \frac{5}{6} * 1,71228 + \frac{1}{6} * 1,70434$$
$$y[8] = 1,71096$$

para n=9

$$y[9] = \frac{1}{3}\left[\mu[9] - \mu[3]\right] + \frac{5}{6}y[8] + \frac{1}{6}y[7]$$
$$y[9] = \frac{5}{6} * 1,71096 + \frac{1}{6} * 1,71228$$
$$y[9] = 1,71118$$

para n=10

$$y[10] = \frac{1}{3}\left[\mu[10] - \mu[4]\right] + \frac{5}{6}y[9] + \frac{1}{6}y[8]$$
$$y[10] = \frac{5}{6} * 1,71118 + \frac{1}{6} * 1,71096$$
$$y[10] = 1,71114$$

Método Recursivo para 10 muestras.

2.1.3 Estabilidad del sistema

Para analizar si un sistema LTI es estable hay que estudiar si la respuesta a una entrada acotada es también acotada.

Debe cumplirse que:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \tag{2.11}$$

Entonces, tomamos la respuesta al impulso del item 2.1.1 y la sustituimos en (2.11)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{24}\left(\frac{-1}{6}\right)^k + \frac{7}{24}(1)^k \right|$$

La sumatoria diverge debido al término $\left(\frac{7}{24}\right)(1)^k$, por lo tanto no es estable

3 Convolución

Sea $\chi[n]$ y $\omega[n]$ dos señales descritas a continuación, si $\omega_c = \frac{\pi}{3}$ y M=4

$$\chi[n] = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi}, n = 0 \\ \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}; resto \end{cases}$$

$$\omega[n] = \begin{cases} \frac{2n}{M}; 0 \leq n \leq \frac{M}{2} \\ 2 - \frac{2n}{M}; \frac{M}{2} < n \leq M \end{cases}$$

3.1 Vectores de las señales

$$\chi[n] = \begin{bmatrix} 0,33 & 0,28 & 0,14 & 0 & -0,07 & -0,06 & 0 & 0,04 & 0,03 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

$$\omega[n] = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 1 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

3.2 $\chi[n] * \omega[n]$

Determinar la convolución para las primeras cuatro muestras de $\chi[n]$ a partir de n=0
se define como:

$$\chi[n] * \omega[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \chi[k]\, h[n-k] \tag{3.3}$$

donde:

$$\chi[k] = \begin{bmatrix} 0,33 & 0,28 & 0,14 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega[n-k] = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 1 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$$

Realizamos la convolución por el método Tabular:

- Se colocan todas las muestras discretas de ambas secuencias en acorde a la variable independiente n.

- Se toma el primer elemento de $h[n]$ y se realiza la multiplicación elemento a elemento $\chi[n]$.

- Se desplaza una posición y se realiza la misma operación de multiplicación para cada uno de los elementos de $h[n]$.

- Se realiza la suma algebraica de todos los elementos de las secuencias productos obtenidas y se reasignan a la secuencia $h[n]$ según la variable independiente n.

Calculamos:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & 0,33 & 0,28 & 0,14 & 0 & \\
 & & 0 & 0,5 & 1 & 0,5 & 0 & \\
\hline
 & 0,33 & 0,28 & 0,14 & 0 & & & \\
0 & 0,5 & 1 & 0,5 & 0 & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
 & 0,165 & 0,14 & 0,07 & 0 & & & \\
 & & 0,33 & 0,28 & 0,14 & 0 & & \\
 & & & 0,165 & 0,14 & 0,07 & 0 & \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0,17 & 0,47 & 0,52 & 0,28 & 0,07 & 0 & 0
\end{array}
$$

finalmente:

$$\chi[n] * \omega[n] = \begin{bmatrix} 0 & 0,17 & 0,47 & 0,52 & 0,28 & 0,07 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.3 $\chi[n] * \omega[n]$ PERIÓDICA

Si $y[n]$ es el resultado de modificar a $\omega[n]$ de tal manera que sea periódica con $N_0 = 10$,determine la convolución interior para la nueva condición.
Con la nueva condición:

$$\omega[n] = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 1 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

procedemos a resolver por el método tabular como en el item (3.2):

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & & 0,33 & 0,28 & 0,14 & 0 \\
0 & 0,5 & 1 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
 & 0,165 & 0,14 & 0,07 & 0 & & & & \\
 & & 0,33 & 0,28 & 0,14 & 0 & & & \\
 & & & 0,165 & 0,14 & 0,07 & 0 & & \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \ldots & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

$$0 \quad 0,17 \quad 0,47 \quad 0,52 \quad 0,28 \quad 0,07 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0_{14}$$

con $\top = 14$

finalmente:

$$y[n] = 0 \quad 0,17 \quad 0,47 \quad 0,52 \quad 0,28 \quad 0,07 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0_{13}$$

3.4 Potencia

Determine la potencia de la señal $y[n]$ del item anterior (3.3)

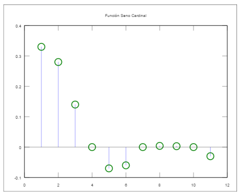
$$P_\infty = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2N+1}\right)\sum_{-N}^{N}\left|y[n]^2\right| \tag{3.4}$$

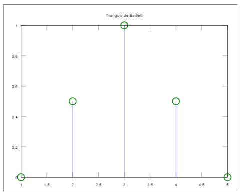
Evaluando:

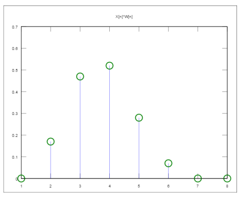
$$P_\infty = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2*13+1}\right)\sum_{n=-13}^{13}|0+0,17+0,47+0,52+0,28+0,07+0+0+0+0+0+0+0+0|^2$$

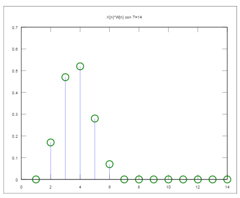
$$P_\infty\textbf{=2,2801 W}$$

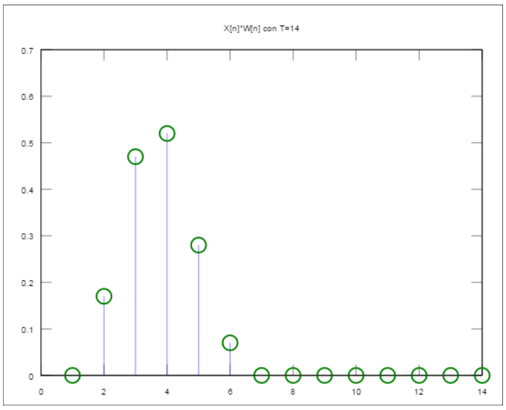
3.5 Gáficas










X[n]*W[n] con T=14