Sbírka příkladů z mikroekonomie

Jiří Pešík, David Martinčík

Copyright © 2014 Jiří Peší, David Martinčík

PUBLISHED BY PUBLISHER

BOOK-WEBSITE.COM

Licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License (the "License"). You may not use this file except in compliance with the License. You may obtain a copy of the License at `http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0`. Unless required by applicable law or agreed to in writing, software distributed under the License is distributed on an "AS IS" BASIS, WITHOUT WARRANTIES OR CONDITIONS OF ANY KIND, either express or implied. See the License for the specific language governing permissions and limitations under the License.

First printing, March 2013

Contents

1 Optimalizace v ekonomii 5

1.1 Metodologie pozitivní ekonomie 5

1.1.1 Metodologický pozitivismus 5

1.1.2 Axiomaticko-deduktivní metoda 6

1.1.3 Metodologický realismus 7

1.2 Typy optimalizace 7

1.2.1 Volná optimalizace 8

1.2.2 Vázaná optimalizace 10

1.2.3 Optimalizace s interakcí okolí 12

1.3 Statická a dynamická optimalizace 18

2 Teorie spotřebitele 23

2.1 Marshallova úloha 23

2.1.1 Cobb-Douglasovy preference 24

2.1.2 Nepřímá funkce užitku 26

2.1.3 Elasticita poptávky 27

2.1.4 Mikroekonomický dopad zdanění 28

2.1.5 Engelovy křivky a homogennost poptávky 29

2.1.6 Další typy poptávek 31

2.2 Hicksova úloha 32

2.2.1 Výdajová funkce 34

2.2.2 Nepřímá funkce užitku 35

2.2.3 Sheppardova poučka 36

2.3 Slutského rozklad 36

2.4 Přímo projevené preference **38**
2.4.1 Množstevní indexy 38
2.4.2 Cenové indexy 39

3 Teorie firmy 43

3.1 Dvoustupňová metoda **43**

3.2 Přímá metoda **44**
3.2.1 Funkce zisku 46

4 DSGE modely 49

4.1 Základní DSGE model **49**
4.1.1 Stochastické šoky 50
4.1.2 Walsrasův aukcionář 51
4.1.3 Základní DSGE model 51

4.2 Numerické řešení a simulace **56**
4.2.1 Model s exogenní nabídkou práce 56
4.2.2 Model s endogenní nabídkou práce 59

5 Bibliography 63

5.1 Books **63**

5.2 Articles **63**

Index 65

Metodologie pozitivní ekonomie
Metodologický pozitivismus
Axiomaticko-deduktivní metoda
Metodologický realismus
Typy optimalizace
Volná optimalizace
Vázaná optimalizace
Optimalizace s interakcí okolí
Statická a dynamická optimalizace

1. Optimalizace v ekonomii

1.1 Metodologie pozitivní ekonomie

Z pohledu metodologie obsahuje ekonomie řadu různých směrů, mezi kterými existují významné metodologické rozdíly. Tyto rozdíly jsou pak jedním z hlavním důvodů, proč se různé ekonomické teorie liší svými teoretickými i praktickými implikacemi.

1.1.1 Metodologický pozitivismus

Ekonomie hlavního proudu (někdy označovaná původním anglickým výrazem *mainstream*) je dnes založena především na používání modelů, často založených na pokročilých matematických metodách.

Používání modelů je ekonomy z jiných směrů často kritizováno. Jednotlivé modely jsou pak nejčastěji kritizovány z důvodu jejich předpokladů, které nejsou v souladu s realitou a jsou (dle názoru kritiků) značně zjednodušující. Odpovědí na tuto kritiku byl článek Miltona Friedmana *Metodologie pozitivní ekonomie*. V něm Friedman vysvětluje, že neexistuje objektivní měřítko toho, *jak moc* jsou předpoklady v souladu s realitou. Naopak samotnou podstatou modelu je určité zjednodušení reality. Zásadní objevy ve vědě by měly spočívat v tom, že vysvětlují *mnoho* pomocí *mála*, nikoli *mnoho* pomocí *mnoha*.

Friedman navrhuje jiné měřítko kvality modelu, a to schopnost modelu poskytovat kvantitativní predikce. Modely lze mezi sebou objektivně porovnávat pomocí jejich schopnosti predikovat ekonomické jevy. Doplňujícím měřítkem je pak složitost modelu a především nákladnost získání potřebných dat. Z alternativních modelů může být zvolen ten s méně přesnými predikcemi, pokud dodatečné náklady na používání druhého modelu nevyvažují zpřesnění predikcí.

Friedman ve svém článku uvádí dnes již legendární příklad s hráčem biliáru. Podle Friedmana by bylo možné na základě fyzikálního modelu určit optimální tah a na jeho základě predikovat příští tah profesionálního biliárového hráče. Tento přístup by generoval dostatečně dobré predikce, ačkoli profesionální hráč se rozhoduje čistě na základě svojí intuice.

Cvičení 1.1 Vyhledejte ve Friedmanově stati další příklady, které používá k ilustraci svého pojetí ekonomie. ■

Cvičení 1.2 Friedman uznává, že v případě dvou modelů, které dávají podobně dobré predikce, lze uplatnit určité alternativní hledisko. Zjistěte, o jaké se jedná. ■

R V žádném případě nezaměňujte pojmy Friedmanův pozitivismus a rozdělení ekonomie na pozitivní a normativní! Jedná se o dva naprosto odlišné koncepty.

1.1.2 Axiomaticko-deduktivní metoda

Další z ekonomických směrů, rakouská škola, využívá axiomaticko-deduktivní metodologický přístup. K objasnění tohoto pojmu si nejprve definujme pojem axiom.

Definice 1.1.1 — Axiom. Axiom je takové tvrzení, které je považováno za platné, aniž by bylo potřeba jeho platnost dokazovat.

Rakouská škola je postavená na axiomu existence a účelovosti lidského jednání. Z tohoto axiomu jsou pak logicky odvozovány (dedukovány) další poznatky.

Ekonomové rakouské školy obhajují axiom lidského jednání tím, že důsledkem jakéhokoli pokusu o jeho popření je jeho potvrzení, protože je nutně účelovým lidským jednání. Tento axiom je platný vždy za všekerých podmínek. Z axiomu lidského jednání lze odvodit např. existenci preferenčních škal, na kterých jsou potřeby každého jednotlivce seřazeny od nejakutnější po nejméně akutní. Logicky však nelze odvodit žádný mechanismus, který by umožňoval porovnání preferenčních škal dvou jedinců, díky čemuž rakouská škola odmítá jakékoli utilitaristické teorie.

Z existence preferenčních škal lze pak odvodit další poznatky, jako třeba fungování směny na trhu. Ekonomoví rakouské školy pracují s faktem, že pokud je tvrzení logicky bezchybně odvozeno z axiomu lidského jednání, pak je nutně platné vždy a za každých okolností.

Rakouská škola odmítá používání matematických modelů, proti nimž používá celou řadu různých argumentů. Vytrvale upozorňuje na fakt, že mainstreamová ekonomie je uzavřená ve svém světě modelů a je zcela odtržena od reality, přičemž řada ekonomů si toho faktu buď není vědoma, nebo (v horším případě) si toho vědoma je, ale nepovažuje to za problém. Rakouská škola rovněž odmítá státní zásahy do ekonomiky, které považuje jak za morálně neobhajitelné, tak za kontraproduktivní. Odmítá i existenci centrální banky a vyzývá k návratu ke svobodnému bankovnictví se stoprocentními rezervami a komoditně krytým penězům.

R Název rakouská škola je dán faktem, že její zakladatelé a počáteční generace jejích autorů pocházeli z Rakouska. Později (mimo jiné v důsledku obsazení Rakouska nacistickým Německem) se tento myšlenkový směr přesunul do ostatních zemí, především do Spojených států amerických.

Cvičení 1.3 Vyhledejte na internetu nejvýznamnější představitele této školy a jejich stěžejší díla. ■

Cvičení 1.4 Pro rakouskou školu je důležitý i metodologický subjektivismus. Nalezněte v literatuře vysvětlení tohoto pojmu. ■

1.1.3 Metodologický realismus

Dalším významným metodologickým přístupem je metodologický realismus, který prosazje především postkeynesiánská ekonomie. Metodologický realismus je protikladem k metodologickému pozitivismu v tom smyslu, že se soustřeďuje především na předpoklady modelů, které se snaží dávat do co největšího souladu s realitou. Ekonomové náležící k tomuto směru např. rozesílali podnikům dotazníky, aby získali informace o jejich chování, a výsledky tohoto průzkumu pak zapracovávali do svých prací.

Postkenesiánská ekonomie, podobně jako ta mainstreamová, používá komplikované matematické modely. Do těchto modelů ale zpravidla vkládá specifické předpoklady jako rigidity nominálních mezd a cen nebo odlišné typy konkurence (především pak monopolistickou konkurenci).

Cvičení 1.5 Vyhledejte na internetu nebo v literatuře další metodologické přístupy v ekonomii. ■

V této cvičebnici se budeme zabývat neoklasickou mikroekonomií, která je součástí mainstreamové ekonomie. Všechny příklady proto prosím řešte v kontextu tohoto ekonomického směru.

1.2 Typy optimalizace

Klíčovým pojmem pro neoklasickou ekonomii je optimalizace.

Definice 1.2.1 — Optimalizace. Optimalizací v ekonomii rozumíme výběrem nejlepšího prvku z množiny dostupných prvků vzhledem k určenému (a zpravidla objektivnímu) optimalizačnímu kritériu.

Objektivnost optimalizačního kritéria zaručuje možnost porovnání libovolných dvou dostupných alternativ a rozhodnutí, která z těchto alternativ je preferovaná (případně zda jsou obě varianty považovány za stejně hodnotné). Zásadním metodologickým rozdílem je, zda je možné pouze seřazení variant od nejvíce preferované po nejméně preferovanou či zda lze hodnoty optimalizačního kritéria vzájemně poměřovat (např. zda lze konstatovat, že varianta x je dvakrát lepší než varianta y). V případě spotřebitele se pak tento rozdíl odráží v existenci kardinalistické a ordinalistické teorie užitku.

V neoklasické mikroekonomii se jako optimalizační kritérium využívá matematická funkce jedné nebo více proměnných. Nezávisle proměnnými funkce popisují jednotlivé prvky z množiny dostupných prvků (např. množství spotřebovávaných statků z určitého spotřebního koše) a hodnota závislé proměnné je mírou preference pro každou konkrétní variantu. Pro veškeré další úlohy budeme uvažovat tento typ optimalizace.

V mikroekonomii nejčastěji uvažujeme, že optimalizace provádí spotřebitel nebo firma. Typickou optimalizační úlohou v mainstreamové ekonomii je pak maximalizace užitku spotřebitele nebo maximalizace zisku firmy. Typickou úlohou v mikroekonomii je pak řešení optimalizačního problému – tj. určení nejlepší dostupné varianty.

V případě optimalizace můžeme obecně uvažovat výběr z konečně mnoho prvků, spočetně mnoha prvků nebo nespotřebně mnoha prvků.

Cvičení 1.6 Vymyslete příklad optimalizační úlohy pro výběr z konečně mnoha prvků a pro výběr z nespočetně mnoha prvků. ■

Mohutnost množiny dostupných variant není jedinou možností, jak rozdělovat optimalizační úlohy. V ekonomii dále rozeznáváme následující dělení optimalizačních úloh:

- volná optimalizace,
- vázaná optimalizace,
- optimalizace se interakcí okolí.

1.2.1 Volná optimalizace

V případě volné optimalizace není množina volných prvků omezena žádnou další funkcí. Může být omezena definičním oborem (kladná spotřeba, kladná výroba atd.). Tento typ optimalizačních úloh se nevyužívá příliš často, protože množství dostupných zdrojů zpravidla bývá omezené a tím pádem bývá omezené i množství existujících cenných statků.

Podle počtu nezávisle proměnných optimalizační funkce pak volíme metodu pro řešení optimalizační úlohy.

- V případě funkce jedné proměnné se využívá derivace prvního a druhého řádu.
- V případě funkcí více proměnných se využívají parciální derivace a následně determinant Jacobiho matice.

Definice 1.2.2 — Derivace funkce. První derivace funkce $f(x)$ podle proměnné x je definovaná jako

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1.1}$$

R Derivace funkce $f(x)$ podle jakékoli jiné proměnné je 0. Druhou derivací funkce funkce $f(x)$ pak rozumíme derivaci první derivace a značíme ji $f''(x)$.

Řešení optimalizační úlohy je pak možné na základě jedné ze základních vět matematické analýzy.

Věta 1.2.1 Má-li funkce v bodě a lokální extrém, pak $f'(a) = 0$. Jestliže $f''(a) > 0$, má funkce v bodě a lokální minimum. Jestliže $f''(a) < 0$, má funkce v bodě a lokální maximum.

R Podmínku $f'(a) = 0$ označujeme jako podmínku prvního řádu (často označováno jako FOC). Její splnění je nutnou (nikoli však postačující) podmínkou k existenci extrému v bodě a. V případě druhé derivace (a obecně u podmínek, které nám zaručují existenci požadovaného extrému v bodě a) pak hovoříme o podmínkách druhého řádu. V případě maximalizační úlohy pak vyžadujeme, aby daný extrém byl maximem, v případě minimalizační úlohy pak hledáme minimum.

V případě problému spotřebitele, který se snaží maximalizovat svůj užitek ze spotřeby statku X, pak rozlišujeme mezi dvěma typy užitkových funkcí – funkcí celkového a mezního užitku.

Poznámka ke značení 1.1. *Typ statku ze spotřebního koše spotřebitele budeme značit velkými písmeny (např. X) a nezávisle proměnnou užitkové funkce, která označuje spotřebované množství statku, pak budeme značit příslušným malým písmenem (např. x).*

Definice 1.2.3 — Užitkové funkce. Funkce celkového užitku spotřebitele ze spotřeby statku X je funkcí spotřebovaného množství statku a pro každé uvažované spotřebovávané množství udává velikost subjektivního užitku spotřebitele ze spotřeby. Funkci budeme značit $TU(x)$.

Funkce mezního užitku $MU(x)$ udává zvýšení užitku při spotřebě dodatečné jednotky spotřebního statku. Jinak řešeno, mezní užitek se rovná diferenci celkového užitku při spotřebě $x+1$ a x kusů daného statku, tj.

$$MU(x) = \triangle TU(x) = TU(x+1) - TU(x) \tag{1.2}$$

Předpokládejme nyní, že spotřebitel je schopen vnímat i takové změny ve spotřebovávaném množství, které se limitně blíží nule. Pro takto malé změny pak můžeme aproximovat funkci mezního užitku pomocí derivace funkce celkového užitku, tj.

$$MU(x) \approx TU'(x) = \frac{\partial T((x)}{\partial x}. \tag{1.3}$$

■ **Příklad 1.1** Spotřebitel má možnost neomezené spotřeby volného statku (cena P statku je 0). Označme si množství spotřebovaného statku jako x (logicky platí, že $x > 0$). Užitková funkce spotřebitele je

$$TU(x) = -x^2 + 15x. \tag{1.4}$$

Určete optimální množství spotřebovaného statku.

Hledáme takovou hodnotu x, pro kterou funkce $TU(x)$ dosahuje maxima. Určíme si derivaci užitkové funkce – funkci mezního užitku $MU(x)$ jako:

$$\frac{\partial TU(x)}{\partial x} = TU'(x) = MU(x) = -2x + 15. \tag{1.5}$$

Protože

$$\frac{\partial^2 TU(x)}{\partial x^2} = TU''(x) = MU'(x) = -2 < 0, \tag{1.6}$$

jedná se o lokální maximum. Optimální množství spotřebovaného statku určíme z rovnice

$$MU(x) = -2x + 15 = 0 \tag{1.7}$$

Optimální množství spotřebovaných statků je tedy $x = 7{,}5$. ■

1.2.2 Vázaná optimalizace

V případě vázané optimalizace uvažujeme, že subjekt může provádět optimalizaci pouze při splnění určité podmínky (nebo sady podmínek). V typickém případě spotřebitele uvažujeme, že celkový objem finančních prostředků vynaložených na nákup spotřebních statků nesmí překročit množství dostupných finančních prostředků.

R Pro zjednodušení budeme uvažovat, že maximalizační úloha má právě dvě nezávislé proměnné. Vyšší množství nezávisle proměnných by výrazně zvýšilo výpočetní náročnost.

Obecně si můžeme maximalizovanou funkci označit jako $f(x,y)$. Dále uvažujme funkci $g(x,y)$, která reprezentuje podmínku úlohy. Při hledání řešení úlohy uvažujeme jenom takové kombinace x a y, pro které platí, že

$$g(x,y) = c\,. \tag{1.8}$$

Matematicky můžeme maximalizační úlohy s vázanou optimalizací zapsat jako

$$\begin{aligned} &\max_{x,y} && f(x,y) \\ &\text{za podmínky} && g(x,y) = c \end{aligned} \tag{1.9}$$

a minimalizační úlohu jako

$$\begin{aligned} &\min_{x,y} && f(x,y) \\ &\text{za podmínky} && g(x,y) = c\,. \end{aligned} \tag{1.10}$$

K řešení tohoto typu úloh se používá **metoda Lagrangeových multiplikátorů**. Pro pochopení jejího principu je nejprve potřba připomenou si pojem gradient.

Definice 1.2.4 — Gradient. Gradient funkce f v bodě (x_0,y_0) je definován jako vektor prvních parciálních derivací funkce podle všech jejích promìnných, tj.

$$\nabla_{x,y} f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \right) \tag{1.11}$$

Přínos gradientu pro řešení optimalizační úlohy je patrný z následující věty. V ní se již vyskytuje Lagrangeův multiplikátor, který budeme značit jako λ.

Věta 1.2.2 V bodě lokálního extrému funkce $f(x,y)$ je gradient maximalizované funkce $f(x,y)$ rovnoběžný s funkcí podmínky $g(x,y)$ (ale obecně mohou být různě dlouhé).

Uvažujme konstantu λ, kterou použijeme ke změně velikosti gradientu funkce $g(x,y)$. Pak v bodě optima (x_0,y_0) platí rovnost

$$\nabla_{x,y} f(x_0,y_0) = \lambda \cdot \nabla_{x,y} g(x_0,y_0) \tag{1.12}$$

R Věta je opět pouze nutnou (a nikoli postačující) podmínkou k existenci extrému. Dále nám neříká, jakým způsobem rozhodnout o tom, zda se jedná o minimum či maximum. V našich úlohách jsou ale body splňující tuto podmínku vždy extrémy požadovaného typu, od hledání podmínek druhého řádu tedy můžeme abstrahovat.

Lagrangeův multiplikátor λ tedy slouží ke změně velikosti (v případě opačného zamínka pak v převrácení směru) funkce podmínky $g(x,y)$ tak, aby v bodě s hledaným extrémem byla totožná s maximalizovanou (resp. minimalizovanou) funkcí $f(x,y)$.

Ve většině současných učebnic ekonomie se používá tzv. Lagrangeova rovnice. Optimální řešení získáme jednoduše tak, že položíme parciální derivace Lagrangeovy rovnice podle všech proměnných (včetně λ) rovny 0. Získáme tak soustavu třech rovnic o třech neznámých, kterou je potřeba vyřešit.

Definice 1.2.5 — Lagrangeova rovnice. Lagrangeova rovnice je zápis podmínek pro optimální řešení do jedné rovnice ve tvaru

$$\mathscr{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\,[g(x,y) - c] \tag{1.13}$$

Úlohu pak jednoduše převedeme na řešení problému $\nabla_{x,y,\lambda}\mathscr{L}(x,y,\lambda) = 0$, tj. řešíme soustavu rovnic

$$\frac{\partial \mathscr{L}(x,y,\lambda)}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}(x,y,\lambda)}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = 0$$

Pro sestavení Lagrangeovy rovnice přepíšeme rovnici podmínky do tzv. implicitního tvaru:

$$g(x,y) - c = 0\,. \tag{1.14}$$

Lagrangeovu rovnici jednoduše získáme tak, že k optimalizované funkci $f(x,y)$ přičteme rovnici podmínky v implicitním tvaru násobenou Lagrangeovým multiplikátorem λ.

Metoda Lagrangeových multiplikátorů je založená na hledání bodů, kde je splněna právě tato rovnost. Postup metody si ilustrujeme na příkladě (prozatím bez ekonomické interpretace).

■ **Příklad 1.2** Vyřešte následující úlohu

$$\begin{aligned} &\min_{x,y} && f(x,y) = x^2 + y^2 \\ &\text{za podmínky} && x \cdot y = 3\,. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Úloha má následující velice jednoduchou geometrickou interpretaci: Pohybujeme se po hyperbole $y = \frac{3}{x}$ a hledáme bod (nebo body), které jsou nejblíže k počátku souřadnicové osy.

Sestavíme si Lagrangeovu rovnici pro daný případ.

$$\mathscr{L}(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x \cdot y - 3) \tag{1.16}$$

a její parciální derivace položeny rovno 0 jsou

$$\frac{\partial \mathscr{L}(x,y,\lambda)}{\partial x} = 2x + \lambda \cdot y = 0$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}(x,y,\lambda)}{\partial y} = 2y + \lambda \cdot x = 0$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = x \cdot y - 3 = 0$$

Nyní již řešíme soustavu rovnic, tj. s metodou Lagrangeových multiplikátorů jsme v podstatě hotovi.

První dvě rovnice si zapíšeme maticově

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

Triviální řešení soustavy $x = 0$, $y = 0$ nesplňuje třetí rovnost $x \cdot y - 3 = 0$. Víme, že soustava má jedno řešení, právě když je determinant roven nule (viz BEČVÁŘ, J. *Lineární algebra.* Matfyzpress, 2010., s. 155), tj. musí platit

$$4 - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 2 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2. \tag{1.18}$$

Nejprve dosadíme do původní soustavy rovnic $\lambda = 2$. Z první rovnice získáme $x = y$ a substitucí do třetí

$$x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3} \tag{1.19}$$

Máme tedy dva body obsahující optimum: $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$. Při dosazení $\lambda = -2$ neexistuje řešení v oboru reálných čísel. ■

V dalších kapitolách si pak vyřešíme řadu příkladů se standardní ekonomickou interpretací. Nejprve se ale podívejme na poslední typ optimalizace.

1.2.3 Optimalizace s interakcí okolí

Okolím rozumíme nějaký jiný subjekt nebo množinu subjektů, které mohou reagovat na potencionální nebo skutečně provedená rozhodnutí. Jedná se o nejsložitější skupinu optimalizačních úloh, které se ale v praxi vyskytují velmi často. Těmito skupinami úloh se zabývá **teorie her**.

Teorie her je disciplína aplikované matematiky, která se zabývá modelováním situací (her), ve kterých dochází ke konfliktu nebo naopak spolupráci mezi inteligentními a racionálními účastníky. V současné době existuje nepřeberné množství knih a vědeckých prací, které se zabývají teorií her, vývojem nových typů her a popisem jejich zákonitostí.

Asi nejznámnějším (a současně nejdůležitějším) pojmem v teorii her je Nashova rovnováha.

Definice 1.2.6 — Nashova rovnováha. Nashova rovnováha je taková kombinace strategií, při které žádný z hráčů nemůže **samostatnou změnou** své strategie zlepšit svoji pozici.

Zajímavé bývá srovnání Nashovy a Hicksovy rovnováhy. Nashova rovnováha říká, jakou strategii subjekty skutečně zvolí. Hicksova rovnováha pak udává takovou strategii, která je pro množinu hráčů jako celek *nejvýhodnější* (ale samozřejmě z pohledu jednoho hráče nejvýhodnější být nemusí).

Definice 1.2.7 — Hicksova rovnováha. Hicksova rovnováha je taková kombinace strategií, při které je součet užitků všech hráčů maximální.

Pro úplnost ještě dodejme, že v ekonomii často používaný termín Paretova rovnováha má i vlastní definici v rámci teorie her.

Definice 1.2.8 — Paretova rovnováha. Paretova rovnováha je taková kombinace strategií, při které nelze zvýšit užitek jednoho hráče, aniž by byl snížen užitek jiného hráče.

Nejčastěji se v ekonomii používá k modelování rozhodování oligopolů.

■ **Příklad 1.3** Dva oligopoly uzavřou kartelovou dohodu, podle které budou oba držet vysoké ceny. Oligopoly se nyní rozhodují, zda dohodu dodržet (D) nebo nedodržet (N). Pokud obě firmy dohodu dodrží, dosáhnou obě zisku 30 mil. Kč. Pokud právě jedna z firem dohodu poruší a sníží ceny, ovládne většinu trhu a získá zisk 60 mil. Kč, druhá bude ve ztrátě 5 mil. Kč. Pokud obě firmy dohodu poruší, bude zisk obou firem 10 mil. Kč.

(R) Jedná se o variantu jednoho z nejznámějších typů her, tvz. vězňova dilematu.

Náš případ lze zobrazit na následující tabulce.

	Nedodržet	Dodržet
Nedodržet	10, 10	60, −5
Dodržet	−5, 60	30, 30

Uvažujme nyní situaci oligopolu 1.

- Pokud se druhý oligopol dohodu dodrží, je pro hráče 1 výhodnější dohodu porušit, protože dosáhne dvojnásobného zisku.
- Pokud oligopol 2 dohodu poruší, bude pro oligopol 1 opět výhodnější dohodu porušit, protože namísto ztráty 5 mil. Kč dosáhne zisku 10 mil. Kč.

Vzhledem k symetrii platí pro hráče 2 analogická úvaha.

Závěr: Pro oba oligopoly je vždy výhodnější dohodu porušit. Kombinace strategií, kdy oba hráči dohodu poruší, je tzv. **Nashovou rovnováhou**. Paradoxní je, že takto oba hráči dosáhnou o 20 mld. Kč nižšího zisku, než při dodržení dohody. Kombinace, oba hráči dohodu dodrží, je tzv. Hicksovou rovnováhou. ■

■ **Příklad 1.4** Letecká společnost ztratila dva naprosto stejné kufry dvou cestujících Adama a Bohouše, kteří se neznají. Společnost hradí škodu od 2000 Kč do 50000 Kč. Každý z cestujících má napsat, na kolik si ztraceného kufru cení (v tisících Kč). Letecká spoleènost oběma nahradí nižší ze sdílených částek.

1. Nalezněte užitkovou matici.
2. Nalezněte užitkovou matici v případě, že letecká společnost odmění cestujícího, který nabídne nižší částku, tím, že k domluvené částce 2000 Kč přidá a naopak cestujícího s vyšší částkou potrestá tím, že mu od výše uvedené částky 2000 Kč odečte. Nabídnou-li stejně, nepřičítá ani neodečítá se nic.

V obou případech nalezněte Nashovu rovnováhu.

Užitková matice v případě bez penalizace má následující tvar (hodnoty jsou zadávány v tisících Kč):

Table 1.1: Užitková funkce

	2	**3**	**4**	**...**	**48**	**49**	**50**
2	2,2	2,2	2,2	...	2,2	2,2	2,2
3	2,2	3,3	3,3	...	3,3	3,3	3,3
4	2,2	3,3	4,4	...	4,4	4,4	4,4
...	...	...	...	...	...	...	...
48	2,2	3,3	4,4	...	48,48	48,48	48,48
49	2,2	3,3	4,4	...	48,48	49,49	49,49
50	2,2	3,3	4,4	...	48,48	49,49	50,50

Nashovy rovnováhy jsou zvýrazněny tučně. Hra tedy má Nashovu rovnováhu vždy na diagonále. Jedinou ostrou nashovou rovnováhou je strategie (50, 50). Pokud cestující číslo 1 řekne určitou částku, pak druhý cestující maximalizuje svůj užitek tak, že řekne stejnou nebo libovolnou vyšší částku než první cestující. V opačném případě platí stejná úvaha. Celkový užitek obou hráčů lze postupně zvyšovat tak, že oba řeknou částku o 1 tisíc Kč větší, až se dostanou na hranici 50 tis. Kč, kterou určila letecká společnost jako maximální náhradu. Pro hráče by byla výhodná případná oboustranná spolupráce.

Pokud by jeden z cestujících nahlásil např. 10 tis. Kč, druhý dosáhne maximálního užitku při nahlášení částky 10 tis. Kč, ale i libovolné vyšší (až do částky 50 tis. Kč).

Table 1.2: Užitková funkce s Nashovými rovnováhami

	2	**3**	**4**	**...**	**48**	**49**	**50**
2	**2,2**	2,2	2,2	...	2,2	2,2	2,2
3	2,2	**3,3**	3,3	...	3,3	3,3	3,3
4	2,2	3,3	**4,4**	...	4,4	4,4	4,4
...	...	...	...	...	...	...	...
48	2,2	3,3	4,4	...	**48,48**	48,48	48,48
49	2,2	3,3	4,4	...	48,48	**49,49**	49,49
50	2,2	3,3	4,4	...	48,48	49,49	**50,50**

Užitková funkce v případě druhé varianty:

Table 1.3: Užitková funkce

	2	**3**	**4**	**...**	**48**	**49**	**50**
2	2,2	4,0	4,0	...	4,0	4,0	4,0
3	0,4	3,3	1,5	...	1,5	1,5	1,5
4	0,4	1,5	4,4	...	6,2	6,2	6,2
...	...	...	...	...	...	...	...
48	0,4	1,5	2,6	...	48,48	50,46	50,46
49	0,4	1,5	2,6	...	46,50	49,49	51,47
50	0,4	1,5	2,6	...	46,50	47,51	50,50

V tomto případě hra má právě jednu Nashovu rovnováhu. Pokud hráč jedna řekne určitou částku, druhý hráč dosáhne nejvyššího užitku tak, že řekne částku o jeden tisíc menší než první hráč. Např. pokud řádkový hráč řekne částku 3 tis. Kč, sloupcový hráč dosáhne maximálního užitku při nahlášení částky 2. tis. Kč. Sloupcový hráč získá 4 tis. Kč a řádkový nezíská nic. Pokud by sloupcový hráč nahlásil rovněž 3 tis. Kč, získali by oba tuto částku, sloupcový hráč by tedy získal o jeden tisíc méně. V tomto případě by ale byl maximalizován celkový užitek obou hráčů, protože by oba dohromady obdrželi 6 tis. Kč, což je o 2 tisíce více než při sobeckém tahu sloupcového hráče. Nashova rovnováha je strategie (2,2). Ani jeden z hráčů v tomto případě nemá možnost jít s nahlášenou částkou dolů a přivlastnit si tak prémii, protože 2 tis. Kč je minimální částka, kterou je možno nahlásit.

Table 1.4: Užitková funkce s Nashovými rovnováhami

	2	**3**	**4**	**...**	**48**	**49**	**50**
2	**2,2**	4,0	4,0	...	4,0	4,0	4,0
3	0,4	3,3	1,5	...	1,5	1,5	1,5
4	0,4	1,5	4,4	...	6,2	6,2	6,2
...	...	...	...	...	...	...	...
48	0,4	1,5	2,6	...	48,48	50,46	50,46
49	0,4	1,5	2,6	...	46,50	49,49	51,47
50	0,4	1,5	2,6	...	46,50	47,51	50,50

■

Existují dvě varianty volby jednoho hráče:

1. volba jedné možnosti (čistá strategie),
2. náhodná volba z několika možností, přičemž každé možnosti je apriori přiřazena pravděpodobnost, se kterou je vybrána (smíšená strategie).

■ **Příklad 1.5** Jednoduchým ilustračním příkladem pro smíšené strategie je známá hra kámen-nůžky-papír se dvěma hráči. Jedná se o tzv. hru s nulovým součtem.

Náš případ lze zobrazit na následující tabulce.

	Kámen	Nůžky	Papír
Kámen	$0, 0$	$1, -1$	$-1, 1$
Nůžky	$-1, 1$	$0, 0$	$1, -1$
Papír	$1, -1$	$-1, 1$	$0, 0$

Jednoduchou úvahou se pokusme nalézt řešení formou **čisté strategie**.

Proveďme například následující posloupnost úvah (pro hráče 1):

1. Pokud hráč 1 bude hrát vždy kámen, hráč 2 může hrát vždy papír a vždy zvítězí.
2. Pokud hráč 1 bude hrát vždy nůžky, hráč 2 může hrát vždy kámen a vždy zvítězí.
3. Pokud hráč 1 bude hrát vždy papír, hráč 2 může hrát vždy nůžky a vždy zvítězí.

Je tedy hra neřešitelná?

V oblasti čistých strategií ano, ale uvažujme následující kombinaci strategií: Oba hráči budou hrát nůžky s pravděpodobností $\frac{1}{3}$, kámen s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ a papír s $\frac{1}{3}$. Pravděpodobnost vítězství každého hráče je v takovém případě $\frac{1}{3}$, pravděpodobnost prohry je $\frac{1}{3}$ a pravděpodobnost remízy $\frac{1}{3}$.

Jedná se ale o Nashovu rovnováhu?

Předpokládejme, že hráč 1 chce zlepšit svoji pozici jednou z následujících možností

1. Pokud hráč 1 bude hrát kámen s vyšší pravděpodobností než $\frac{1}{3}$, hráč 2 může hrát vždy papír a pravděpodobnost jeho vítězství je vyšší než $\frac{1}{3}$.
2. Pokud hráč 1 bude hrát nůžky s vyšší pravděpodobností než $\frac{1}{3}$, hráč 2 může hrát vždy kámen a pravděpodobnost jeho vítězství je vyšší než $\frac{1}{3}$.
3. Pokud hráč 1 bude hrát papír s vyšší pravděpodobností než $\frac{1}{3}$, hráč 2 může hrát vždy nůžky a pravděpodobnost jeho vítězství je vyšší než $\frac{1}{3}$.

Samostatná změna strategie hráče 1 vede ke změně strategie hráče 2, přičemž hráč 1 si díky změně pohorší.

Kombinace smíšených strategií, kdy oba hráči volí každou možnost s pravděpodobností $\frac{1}{3}$, je Nashova rovnováha. ■

Pro obě hry tedy existuje Nashova rovnováha. Nabízí se otázka, jestli existuje i hra, pro kterou Nashova rovnováha neexistuje? V našich jednoduchých případech ne, protože platí následující dvě věty.

Věta 1.2.3 — von Neumannova věta (1928). Každá hra s konečným počtem opakování, dvěma hráči a nulovým součtem užitků má alespoň jednu Nashovu rovnováhu.

R Jedná se o značně pozměněnou interpretaci původní věty, protože pojem Nashovy rovnováhy byl definován Johnem Nashem až o 20 let později.

Předcházející věta pokrývá poměrně úzkou skupinu her (nepokrývá dokonce ani vězňovou dilema), platí ovšem i obecnější věta.

Věta 1.2.4 — Nashova věta (1950). Každá hra s konečným počtem opakování má alespoň jednu Nashovu rovnováhu.

Cvičení 1.7 Vymyslete hru s ekonomickou interpretací, kde je Hicksova, Nashova i Paretova rovnováha odpovídá stejné kombinaci čistých strategií. ■

Obě předcházející hry byly rovněž zvláštní tím, že oba hráči se rozhodovali najednou a neznali rozhodnutí předcházejících hráčů. Hry tohoto typu označujeme jako **statické hry**. Teorie her ale umí řešit i **dynamické hry**, ve kterých se jednotliví hráči rozhodují postupně a mají možnost reagovat na rozhodnutí všech předcházejících hráčů. Před popisem tohoto typu her si ale vyzkoušejme jednoduchou logickou úvahu.

Cvičení 1.8 Uvažujme problém oligopolů jako dynamickou hru, tj. druhý oligopol má k dipozici informaci o tom, zda první oligopol dohodu poruší nebo ne. Jaký to bude mít vliv na chování první a druhého oligopolu? ■

■ **Příklad 1.6** Dva obchodní řetězce uvažují o výstavbě supermarketu v menším městě. Z marketingové studie vyplývá, že vzhledem k počtu obyvatel je projekt stavby výhodný pouze v případě, že ve městě nebude postaven žádný další supermarket.

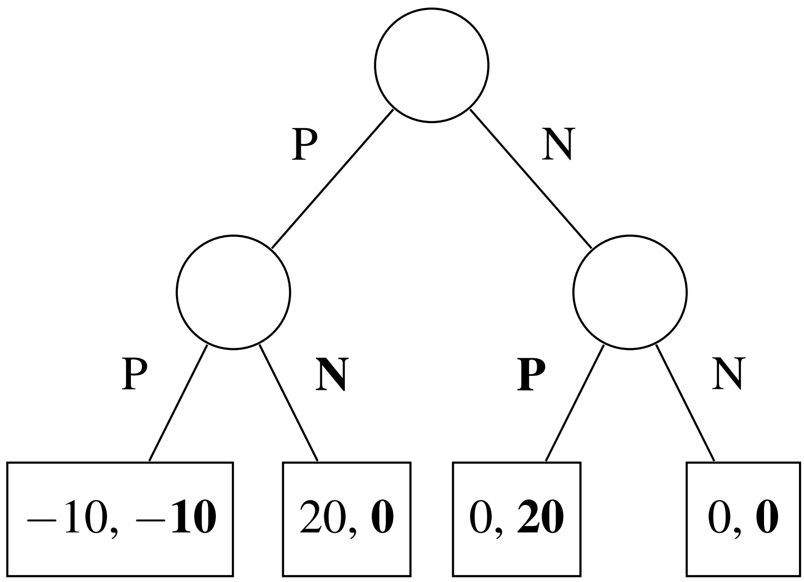
Pro přehlednost si můžeme nejprve hru rozepsat jako statickou, tj.

	Postavit	Nepostavit
Postavit	−10, −10	20, 0
Nepostavit	0, 20	0, 0

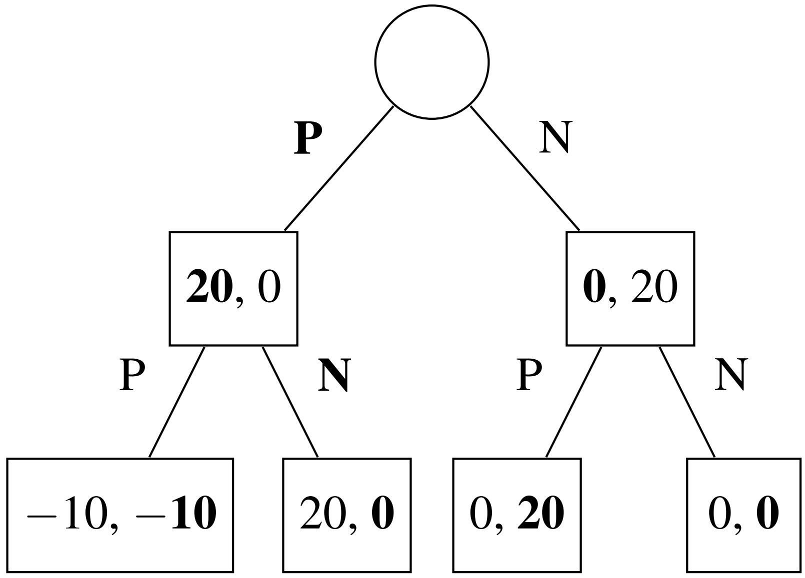
V tomto případě má hra dvě Nashovy rovnováhy, při kterých vždy jedna z firem supermarket postaví a druhá ne. Pokud se totiž jedna z firem rozhodne supermarket postavit, pak druhá preferuje nulovou ztrátu před ztrátou 10 milionů, které by čelila při stavbě supermarketu. Naopak pokud se jedna z firem rozhodne supermarket nepostavit, druhá jej určitě postaví a vydělá na tom dvacet milonů. V tomto případě ale v podstatě nevíme, která ze dvou firem supermarket postaví.

Nyní předpokládejme, že ve městě existuje vhodný pozemek pro tuto stavbu, který je v rukou místního obyvatele, jedna ze dvou firem však má na tento pozemek předkupní právo. V takovém případě je tato firma schopna realizovat svůj projekt rychleji a je tedy tou, která se rozhoduje jako první. Současně se informace o rozhodnutí první firmy dostane ke druhé firmě a ta na něj může reagovat.

Tento problém je nejpřehlednější zaznamenat ve formě rozhodovacího stromu. V rozhodovacím stromě vidíme, že nejprve se rozhoduje první hráč o tom, zda supermarket postavit (P) nebo nepostavit (N). Pro každou z variant pak analyzujeme rozhodování druhého hráče. V dolní části stromu jsou rozepsány jejich potenciální užitky.



Tento typ úloh lze řešit metodou zpětné indukce. Uvažujeme-li, že hra má n hráčů, pak při zpětné indukci určíme optimální volbu n-tého hráče pro každé z možných rozhodnutí hráče $n-1$. Pokud víme, jak se rozhodne hráč n, pak pro každé možné rozhodnutí hráče $n-1$ můžeme přímo do rozhodovacího stomu zapsat jeho užitky. Na základě toho pak můžeme určit jeho optimální volbu pro všechna možná rozhodnutí předchozího hráče atd. Postup končí, jakmile dosáhneme prvního hráče.



Nyní se v pozici prvního hráče rozhodujeme, zda supermarket postavit. Víme, že pokud jej postaví, druhý hráč jej již stavět nebude. První hráč má tedy možnost získat zisk 20 milionů a této možnosti nepochybně využije.

Pokud první hráč supermarket postaví, pro druhého hráče je výhodnější ho nepostavit. Naopak pokud první hráč supermarket nepostaví, druhý hráč jej stavět určitě bude.

■

V této hře je výhodnější hrát jako první, naopak při hře kámen-nůžky-papír je výhodnější hrát jako poslední. Při hře typu vězňovo dilema je jedno, zda se hráči rozhodují najednou či postupně.

Cvičení 1.9 Navrhněte hru s ekonomickou interpretací, kdy je vždy výhodnější hrát jako poslední. ■

Cvičení 1.10 Navrhněte dynamickou hru s ekonomickou interpretací pro tři hráče, kdy je vždy výhodnější hrát jako prostřední. Porovnejte výsledek se situací, kdyby se všichni hráči rozhodovali najednou. ■

1.3 Statická a dynamická optimalizace

Velmi často také rozlišujeme mezi statickými a dynamickými optimalizačními úlohami. V případě dynamické optimalizace vstupuje do úlohy čas a chování subjektu v minulosti má vliv na jeho situaci a možnosti volby v budoucnosti. Subjekt je tedy kromě omezujících podmínek či okolí ovlivňován i svými vlastními předchozími rozhodnutími.

R Rozdělení úloh na statické a dynamické se velice často používá v vědeckých dalších disciplínách, jako např. teorie zásob, kybernetika atd.

V případě dynamických her uvažujeme několik (případně i nekonečně mnoho) opakujících se herních kol. Hráči opět volí strategie jako u statických her, mohou ale navíc reagovat na strategii ostatních hráčů v minulých kolech. V případě dynamických her je ale obrovské množství možných strategií v závislosti na tom, na kolik a jak předchozích rozhodnutí soupeřů každý hráč reaguje. Postup si ukážeme opět na příkladu duopolu.

■ **Příklad 1.7** Uvažujme nyní, že dva výrobci se rozhodují o stanovení ceny každý měsíc. Před prvním kolem hráči uzavřou dohodu a každý měsíc pak stanoví cenu podle toho, jestli dohodu dodrží nebo ne. Pokud by hráči nereagovali na chování soupeřů v minulých kolech, mohly by existovat strategie *Vždy dodržet dohodu* a *Vždy nedodržet dohodu*. Obecně je možné, aby hráč v kole t reagoval na libovolné rozhodnutí v kolech 0 až $t-1$. Pro zjednodušení povolíme hráčům pouze strategii *Jednou a dost*, kdy hráč bude dodržovat dohodu až do první zrady svého soupeře. Po první zradě soupeře již smlouvu nikdy dodržovat nebude.

Ukážeme si nejprve případ s 10 opakujícími se koly.

	VN	VD	J!
VN	50, 50	180, 20	63,47
VD	20, 180	100, 100	$10 \cdot 10 = 100$, $10 \cdot 10 = 100$
J!	$2+9 \cdot 5 = 47$, $18+9 \cdot 5 = 63$	100, 100	100, 100

Z tabulky vidíme, že pokud jeden z hráčů bude hrát podle strategie Jednou a dost, pak je pro druhého výhodné hrát buď stejnou strategii nebo strategii Vždy dodržet dohodu. Obě strategie vedou k tomu, že oba hráči budou ve všech kolech dodržovat dohodu. Kartelová dohoda tedy bude stabilní.

Problém je v tom, že hráčům jsme povolili pouze omezenou množinu strategií. Pokud bychom připustili více strategií, pak v posledním kole by pro hráče nebylo výhodné dohodu dodržovat, protože soupeř by jim to v dalším kole již nemohl oplatit. Pokud je však jasné, že hráči v posledním kole tak jako tak dohodu poruší, neexistuje důvod dohodu dodržovat v předposledním kole a tak dále.

Je možné uvažovat i nekonečně (ale spočetně) mnoho herních kol. Protože by však byl celkový zisk pro všechny strategie nekonečný, nešlo by je vzájemně porovnat. Proto uvažujme diskontní faktor δ ($\delta \in (0,1)$), kterým je diskontován užitek ze všech kol. Užitek a_t v kole t má pak diskontovanou hodnotu $\delta^t \cdot a_t$. Pokud kombinace strategií zaručuje užitek a_t pro $t = 1,2,3\ldots$, pak celkový užitek ze strategie je $\sum\limits_{t=0}^{\infty} \delta^t \cdot a_t$.

Uvažujme nyní, že nějaká kombinace strategií zajistí konstantní užitek a. V předchozím případě to byla například kombinace strategií Jednou a dost. Je zřejmé, že se jedná o geometrickou řadu a protože $|\delta| < 1$, je tato řada konvergentní. Její součet je $\sum\limits_{t=0}^{\infty} \delta^t \cdot a = \frac{a}{1-\delta}$. Pokud je užitek v několik kolech jiný, lze rovněž využít předchozí vzorec. Uvažujme, že se užitek liší v nultém kole od a o Δ_0, tj. $\Delta_0 = a_t - a$. Pak je součet užitků dán vzorcem $\sum\limits_{t=0}^{\infty} \delta^t \cdot a_t = \frac{a}{1-\delta} + \delta^0 \cdot \Delta_0 = \frac{a}{1-\delta} + \Delta_0$ [1] .

Uvažujme nyní model chování duopolistů v nekonečném časovém horizontu. Uvažujme stejné strategie jako v předchozím případě.

[1] Obecně pokud by se užitek lišil v n kolech ($n \in \mathbb{N}$), pak lze určit rozdíly $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ a součet užitků je dán vzorcem $\sum\limits_{t=0}^{\infty} \delta^t \cdot a_t = \frac{a}{1-\delta} + \delta^0 \cdot \Delta_0 + \delta^1 \cdot \Delta_1 + \delta^2 \cdot \Delta_2 + \ldots + \delta^n \cdot \Delta_n$.

	VN	VD	J!
VN	$\frac{5}{1-\delta}, \frac{5}{1-\delta}$	$\frac{18}{1-\delta}, \frac{2}{1-\delta}$	$\frac{5}{1-\delta}+15, \frac{5}{1-\delta}-3$
VD	$\frac{2}{1-\delta}, \frac{18}{1-\delta}$	$\frac{10}{1-\delta}, \frac{10}{1-\delta}$	$\frac{10}{1-\delta}, \frac{10}{1-\delta}$
J!	$\frac{5}{1-\delta}-3, \frac{5}{1-\delta}+15$	$\frac{10}{1-\delta}, \frac{10}{1-\delta}$	$\frac{10}{1-\delta}, \frac{10}{1-\delta}$

Výběr strategie záleží na velikosti diskontního faktoru δ. Pokud budou hráči dostatečně trpěliví, pak se Nashovou rovnováhou stanou strategie Jednou a dost a Vždy dodržet dohodu. Kartelová dohoda tedy bude stabilní. ∎

V předchozích hrách jsme uvažovali omezenou množinu strategií. Firma však může rozhodovat přímo o objemu vyrobené produkce. V takovém případě existuje velké množství existujících strategií. Protože řešení takové hry předchozími postupy by bylo velmi komplikované, používá se spojitá aproximace. Budeme tedy předpokládat, že objem vyrobené produkce q_i i-tou firmou je z množiny reálných čísel. Pak můžeme odvodit rovnováhy firem pomocí derivací.

■ **Příklad 1.8** V Cournotově modelu uvažujeme dvě firmy. Uvažujme, že produkce firem je q_i ($i \in \{1,2\}$)). Celková produkce odvětví je $Q = q_1 + q_2$. Tržní cena závisí na množství nabízeného zboží. Pokud je produkce firem příliš vysoká a překročí určitou maximální úroveň Q_0, je cena zboží nulová. Uvažujme lineární vztah $P(Q) = P_0(1 - \frac{Q}{Q_0})$, který platí pro $0 < Q < Q_0$. Uvažujme lineární nákladovou funkci $C(q_i) = c \cdot q_i$, fixní náklady jsou nulové. Zisk i-té firmy je dán rovnicí

$$\pi_i(q_1, q_2) = q_i \cdot P(Q) - c \cdot q_i \,.$$

Tuto funkci chceme maximalizovat, položíme tedy první parciální derivaci rovnu 0. V případě první firmy

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 0 \,.$$

Parciální derivace má tvar

$$\frac{\partial(q_1 \cdot P_0(1 - \frac{q_1+q_2}{Q_0}) - c \cdot q_1)}{\partial q_1} =$$
$$\frac{\partial(q_1 \cdot P_0 - q_1^2 \cdot \frac{P_0}{Q_0})q_1 \cdot q_2 \cdot \frac{P_0}{Q_0} - c \cdot q_1}{\partial q_1} =$$
$$P_0 - 2 \cdot q_1 \cdot \frac{P_0}{Q_0} - q_2 \cdot \frac{P_0}{Q_0} - c = 0 \,. \quad (1.20)$$

Z rovnosti si vyjádříme q_1:

$$-2 \cdot q_1 \cdot \frac{P_0}{Q_0} = -P_0 + q_2 \cdot \frac{P_0}{Q_0} + c$$
$$-q_1 = \frac{Q_0}{2 \cdot P_0}(P_0 + q_2 + \frac{c}{P_0})$$
$$q_1 = \frac{Q_0}{2}(1 - \frac{q_2}{Q_0} - \frac{c}{P_0}).$$

Snadno bychom pomocí druhé parciální derivace podle q_1 ověřili, že zisk je v pro vypočítané q_1 maximální.

Obdobným způsobem lze určit nabízené množství druhou firmou:

$$q_2 = \frac{Q_0}{2}(1 - \frac{q_1}{Q_0} - \frac{c}{P_0})$$

Nashovu rovnováhu získáme jako řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned}
q_1 &= \frac{Q_0}{2}(1 - \frac{q_2}{Q_0} - \frac{c}{P_0}) \\
q_2 &= \frac{Q_0}{2}(1 - \frac{q_1}{Q_0} - \frac{c}{P_0})
\end{aligned}$$

Soustavu lze řešit například substitucí - do první rovnice si dosadíme za q_2 ze druhé rovnice a upravíme

$$\begin{aligned}
q_1 &= \frac{Q_0}{2}(1 - \frac{\frac{Q_0}{2}(1 - \frac{q_1}{Q_0} - \frac{c}{P_0})}{Q_0} - \frac{c}{P_0}) \\
q_1 &= \frac{Q_0}{2}(1 - \frac{1}{2} + \frac{q_1}{2 \cdot Q_0} + \frac{c}{2 \cdot P_0} - \frac{2 \cdot c}{c \cdot P_0}) \\
q_1 &= \frac{Q_0}{2}(\frac{1}{2} + \frac{q_1}{2 \cdot Q_0} - \frac{c}{c \cdot P_0}) \\
q_1 &= \frac{Q_0}{4} + \frac{q_1}{4} - \frac{c \cdot Q_0}{4 \cdot P_0}) \\
\frac{4 \cdot q_1}{4} - \frac{q_1}{4} &= \frac{Q_0}{4}(1 - \frac{c}{P_0}) \\
\frac{3 \cdot q_1}{4} &= \frac{Q_0}{4}(1 - \frac{c}{P_0}) \\
q_1 &= \frac{Q_0}{3}(1 - \frac{c}{P_0})
\end{aligned}$$

Je zřejmé, že platí $q_1 = q_2$ a tedy $q_1 = q_2 = \frac{Q_0}{3}(1 - \frac{c}{P_0})$.

Lze dokázat, že funkce zisku obou firem by byla $\pi_i = \frac{Q_0 \cdot P_0}{9}(1 - \frac{c}{P_0})^2$.

Dvojice firem bude vyrábět více zboží a nabízet ho za nižší cenu, než by prováděl monopolní výrobce. ∎

Marshallova úloha
Cobb-Douglasovy preference
Nepřímá funkce užitku
Elasticita poptávky
Mikroekonomický dopad zdanění
Engelovy křivky a homogennost poptávky
Další typy poptávek
Hicksova úloha
Výdajová funkce
Nepřímá funkce užitku
Sheppardova poučka
Slutského rozklad
Přímo projevené preference
Množstevní indexy
Cenové indexy

2. Teorie spotřebitele

V rámci teorie spotřebitele budeme analyzovat chování spotřebitele na trzích výrobního zboží. Budeme tedy řešit problém parciální rovnováhy, tj. budeme hledat rovnovážný stav na jednom z trhů. Komplexnějšímu pohledu na ekonomickou realitu se budeme věnovat v rámci kapitoly o dynamických stochastických modelech všeobecné rovnováhy.

2.1 Marshallova úloha

Základním problémem, který budeme v rámci teorie spotřebitele řešit, je Marshallova úloha. Při této úloze uvažujeme spotřebitele, který má úrčité (konstantní a exogenně dané) množství peněžních prostředků a ty chce utratit za zboží a služby.

Pro zjednodušení budeme pracovat s předpokladem, že spotřebitel se rozhoduje mezi dvěma druhy zboží – zbožím X a zbožím Y.

Definice 2.1.1 Marshallovou úlohou myslíme maximalizaci užitku při konstantním a pevně daném důchodu, tj.

$$\begin{aligned} &\max_{X,Y} && U(X,Y) \\ &\text{za podmínky} && P_X \cdot X + P_Y \cdot Y = I. \end{aligned} \tag{2.1}$$

■ **Příklad 2.1** Určete podmínku, která zaručuje maximalizaci užitku spotřebitele pro Marshallovu úlohu.

Nejprve sestavíme Lagrangeovu rovnici. Lagrangeova funkce má tvar

$$\mathscr{L} = U(X,Y) + \lambda(P_X \cdot X + P_Y \cdot Y - I). \tag{2.2}$$

Určíme si její parciální derivace

$$\frac{\partial \mathcal{L}(X,Y,\lambda)}{\partial X} = MU_X(X,Y) + \lambda \cdot P_X = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}(X,Y,\lambda)}{\partial Y} = MU_Y(X,Y) + \lambda \cdot P_Y = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}(X,Y,\lambda)}{\partial \lambda} = P_X \cdot X + P_Y \cdot Y - I = 0$$

$MU_X(X,Y)$ je funkce mezního užitku ze spotřeby X definovaná jako

$$MU_X(X,Y) = \frac{\partial U(X,Y)}{\partial X} \tag{2.3}$$

Pokud si z obou rovnic vyjádříme λ:

$$\lambda = -\frac{MU_X(X,Y)}{P_X} = -\frac{MU_Y(X,Y)}{P_Y}. \tag{2.4}$$

Úpravou této rovnice získáme podmínku maximalizace užitku:

$$\frac{MU_X(X,Y)}{MU_Y(X,Y)} = \frac{P_X}{P_Y}, \tag{2.5}$$

tedy poměr mezních užitků se rovná poměru cen zboží. ■

Definice 2.1.2 **Stínová cena** je hodnota, o kterou se změní hodnota maximalizované funkce při zvýšení hodnoty konstanty o 1.

Zjistili jsme, že Lagrangeův multiplikátor λ je dán výrazem

$$\lambda = -\frac{MU_X(X,Y)}{P_X} = -\frac{MU_Y(X,Y)}{P_Y}, \tag{2.6}$$

tedy poměr mezního přínosu a mezního nákladu z jednotky dalšího statku. Jinak řečeno, je to přírůstek užitku při zvýšení důchodu spotřebitele. Jedná se tedy o stínovou cenu důchodu.

2.1.1 Cobb-Douglasovy preference

■ **Příklad 2.2** Uvažujme spotřebitele s Cobb-Douglasovou užitkovou funkcí

$$U = X^c \cdot Y^d \tag{2.7}$$

s parametry c a d. Určete Marshallovy poptávky spotřebitele po statcích X a Y.

Příklad lze zjednodušit zlogaritmováním užitkové funkce (pozitivně monotónní transformace):

$$\ln U(X,Y) = c \cdot \ln X + d \cdot \ln Y \tag{2.8}$$

Řešíme následující problém

$$\begin{aligned} &\max_{X,Y} && c \cdot \ln X + d \cdot \ln Y \\ &\text{za podmínky} && P_X \cdot X + P_Y \cdot Y = I. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Lagrangeova funkce má tvar

$$\mathscr{L} = c \cdot \ln X + d \cdot \ln Y + \lambda(P_X \cdot X + P_Y \cdot Y - I)\,. \tag{2.10}$$

Určíme si její parciální derivace

$$\frac{\partial \mathscr{L}(X,Y,\lambda)}{\partial X} = \frac{c}{X} + \lambda \cdot P_X = 0$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}(X,Y,\lambda)}{\partial Y} = \frac{d}{Y} + \lambda \cdot P_Y = 0$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}(X,Y,\lambda)}{\partial \lambda} = P_X \cdot X + P_Y \cdot Y - I = 0$$

Z prvních dvou rovnic si vyjádříme proměnné c a d:

$$c = -\lambda \cdot P_X \cdot X$$
$$d = -\lambda \cdot P_Y \cdot Y$$

Rovnice můžeme sečíst

$$c + d = -\lambda(P_X \cdot X + P_Y \cdot Y)$$

Protože víme, že $P_X \cdot X + P_Y \cdot Y = I$, můžeme si proměnnou λ vyjádřit jako

$$\lambda = -\frac{c+d}{I} \tag{2.11}$$

a dosadit ji do původních rovnic

$$c = \frac{c+d}{I} \cdot P_X \cdot X$$
$$d = \frac{c+d}{I} \cdot P_Y \cdot Y$$

Nyní si vyjádříme X a Y, čímž již získáme Marshallovy poptávky.

$$M_X(I,P_X,P_Y) = X = \frac{c}{c+d} \cdot \frac{I}{P_X}$$
$$M_Y(I,P_X,P_Y) = Y = \frac{d}{c+d} \cdot \frac{I}{P_Y}$$

Výrazy $\frac{c}{c+d}$ a $\frac{d}{c+d}$ určují podíly výdajů na statky X a Y. ■

■ **Příklad 2.3** Uvažujme spotřebitele s Cobb-Douglasovou užitkovou funkcí

$$U(X,Y) = X \cdot Y\,, \tag{2.12}$$

dále platí $P_X = 4$, $P_Y = 10$, $I = 160$. Určete poptávané množství statků X a Y.

Pro zjednodušení provedeme monotónní transformaci

$$U(X,Y) = X^{\frac{1}{2}} \cdot Y^{\frac{1}{2}} \tag{2.13}$$

a poté druhou transformaci

$$\ln U(X,Y) = \frac{1}{2} \cdot \ln X + \frac{1}{2} \cdot \ln Y \tag{2.14}$$

Lagrangeova funkce má tvar

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2} \cdot X + \frac{1}{2} \cdot Y + \lambda(4X + 10Y - 160)\,. \tag{2.15}$$

Určíme si její parciální derivace

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}(X,Y,\lambda)}{\partial X} &= \frac{1}{2X} + 4\lambda = 0\\
\frac{\partial \mathscr{L}(X,Y,\lambda)}{\partial Y} &= \frac{1}{2Y} + 10\lambda = 0\\
\frac{\partial \mathscr{L}(X,Y,\lambda)}{\partial \lambda} &= 4X + 10Y - 160 = 0
\end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic si vyjádříme λ:

$$\lambda = -\frac{1}{20Y} = -\frac{1}{8X}$$

Dosadíme zpět a upravíme

$$\begin{aligned}
X &= \frac{5Y}{2}\\
Y &= \frac{2X}{5}
\end{aligned}$$

Vidíme, že spotřebitel bude vždy nakupovat oba statky v konstantním poměru. Dosadíme druhou rovnici do rozpočtového omezení:

$$4X + \frac{20X}{5} = 160\,. \tag{2.16}$$

Po úpravě

$$X = 20\,. \tag{2.17}$$

Spotřebitel tedy nakupuje 20 kusů statku X a 8 kusů statku Y. ■

2.1.2 Nepřímá funkce užitku

Definice 2.1.3 Nepřímá funkce užitku je funkcí důchodu spotřebitele a cen zboží P_X a P_Y a udává velikost užitku spotřebitele ze spotřeby.

■ **Příklad 2.4** Uvažujme spotřebitele s Cobb-Douglasovou užitkovou funkcí

$$U = X^{\frac{1}{2}} \cdot Y^{\frac{1}{2}}\,. \tag{2.18}$$

Určete nepřímou funkci užitku.

Užitková funkce je analogická k příkladu při $c = \frac{1}{2}$ a $d = \frac{1}{2}$. Marshallovy poptávky tedy mají tvar

$$M_X(I,P_X,P_Y) = X = \frac{1}{2}\cdot\frac{I}{P_X}$$
$$M_Y(I,P_X,P_Y) = Y = \frac{1}{2}\cdot\frac{I}{P_Y}$$

Nepřímou funkcí užitku získáme dosazením Marshallových poptávek do užitkové funkce:

$$U(X,Y,I) = X^{\frac{1}{2}}\cdot Y^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{I}{P_X}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{I}{P_Y}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.19}$$

Provedeme úpravu předchozí rovnice

$$\sqrt{\frac{I^2}{4P_X\cdot P_Y}} = \frac{I}{2\cdot\sqrt{P_X\cdot P_Y}} = V(P_X,P_Y,I) \tag{2.20}$$

Funkce $V(P_X,P_Y,I)$ udává velikost užitku spotřebitele a je funkcí ceny statků a důchodu spotřebitele, jedná se tedy o nepřímou funkci užitku. ■

2.1.3 Elasticita poptávky

Definice 2.1.4 Bodová **cenová elasticita poptávky** zboží X je měřítkem citlivosti poptávky po zboží X na změnu P_X

$$e_{P_X,X} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial P_X}}{\frac{Q}{P_X}} = \frac{\frac{\partial M_X}{\partial P_X}}{\frac{M_X}{P_X}} \tag{2.21}$$

Definice 2.1.5 Bodová **důchodová elasticita poptávky** zboží X je měřítkem citlivosti poptávky po zboží X na změnu důchodu

$$e_{I,X} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial I}}{\frac{Q}{I}} = \frac{\frac{\partial M_X}{\partial I}}{\frac{M_X}{I}} \tag{2.22}$$

Definice 2.1.6 Bodová **křížová elasticita poptávky** zboží X je měřítkem citlivosti poptávky po zboží X na změnu P_Y

$$e_{P_Y,X} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial P_Y}}{\frac{Q}{P_Y}} = \frac{\frac{\partial M_X}{\partial P_Y}}{\frac{M_X}{P_Y}} \tag{2.23}$$

■ **Příklad 2.5** Marshallova poptávka po statku X má tvar

$$M_X(P_X,P_Y,I) = 25 + 0{,}5I - 0{,}2P_X + 1{,}5P_Y\,. \tag{2.24}$$

Pro $I = 15$, $P_X = 75$ a $P_Y = 5$ určete cenovou, křížovou a důchodovou elasticitu poptávky. Dále rozhodněte, zda se jedná o statek normální, podřadný či Gifennův a zda statky X a Y jsou substituty a komplementy.

Určíme současnou poptávku spotřebitele:

$$M_X(P_X,P_Y,I) = 25+7{,}5-15+7{,}5 = 25 \tag{2.25}$$

Nejprve určíme cenovou elasticitu poptávky.

Dosadíme do vzorce:

$$e_{P_X,X} = \frac{-0{,}2}{\frac{25}{75}} = -\frac{20}{\frac{100}{3}} = -\frac{6}{10} \tag{2.26}$$

Poptávka je neelastická a nejedná se o Giffenův statek.

Dosadíme do vzorce:

$$e_{I,X} = \frac{0{,}5}{\frac{25}{15}} = \frac{5}{\frac{50}{3}} = \frac{3}{10} \tag{2.27}$$

Jedná se o normální statek.

Dosadíme do vzorce:

$$e_{P_Y,X} = \frac{1{,}5}{\frac{25}{5}} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10} \tag{2.28}$$

Statky jsou substituty. ■

2.1.4 Mikroekonomický dopad zdanění

■ **Příklad 2.6** Vláda plánuje zdanit důchod spotřebitele a rozhoduje se, zda použít přímou nebo nepřímou daň. Daňové sazby vláda stanoví tak, aby v případech obou daní byl daňový výnos stejný. Rozhodněte, která z daní bude mít více negativní dopad na spotřebitele.

Původní rozpočtové omezení spotřebitele je

$$P_X \cdot X + P_Y \cdot Y = I\,. \tag{2.29}$$

Uvažujme zavedení spotřební daně se sazbou $t > 0$ na statek X. Rozpočtové omezení má nyní tvar

$$(t+P_X)\cdot X + P_Y \cdot Y = I\,. \tag{2.30}$$

Označme si nová optimální množství zboží jako $X^\star$ a $Y^\star$ a daňový výběr jako

$$R^\star = t \cdot P_X \cdot X^\star\,. \tag{2.31}$$

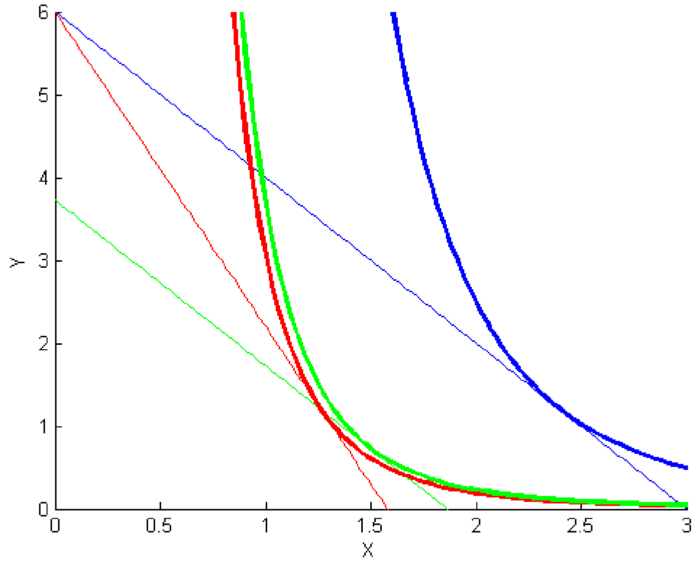
Rozpočtové omezení pro přímou daň je

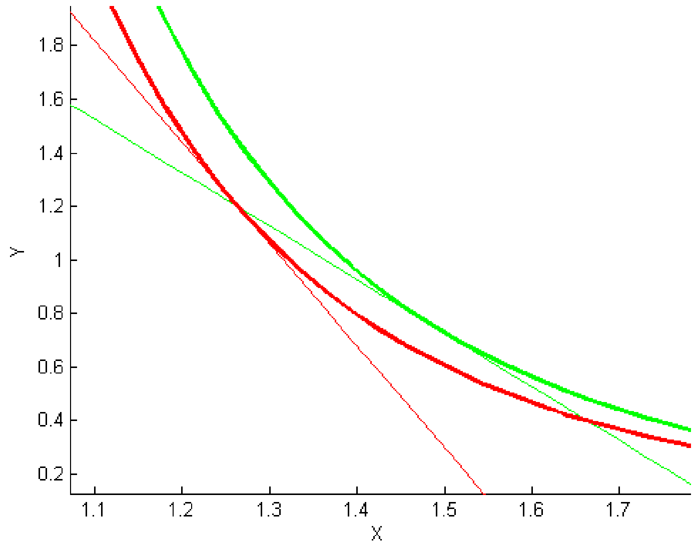
$$(t+P_X)\cdot X + P_Y \cdot Y = I - R^\star = I - t\cdot P_X \cdot X^\star\,. \tag{2.32}$$

Je zřejmé, že linie rozpočtu obou daní se protínají v bodě optima při nepřímé dani $(X^\star,Y^\star)$. Mezní míra substituce v bodě $(X^\star,Y^\star)$ je $-\frac{P_X(1+t)}{P_Y}$. Při důchodové dani je směrnice linie rozpočtu $-\frac{P_X}{P_Y}$, mezní míra substituce bude tedy v optimu $-\frac{P_X}{P_Y}$. Indiferenční křivka označující užitek při nepřímém zdanění musí protínat linii rozpočtu při přímém zdanění. Existuje tedy indiferenční křivka s vyšším užitkem, která tečuje linii rozpočtu při přímém zdanění.

Závěr: Spotřebitel dosahuje vyšší úrovně užitku při přímé dani než při nepřímé dani.

■





2.1.5 Engelovy křivky a homogennost poptávky

V této subkapitole se budeme věnovat dvěma důležitým pojmům – Engelově křive a homogennosti poptávky.

Definujme si nejprve pojem hommogenosti funkce. Definice tohoto pojmu je velmi obecná, protože se jedná o jednu ze standardních vlastností funkce v matematické analýze. V této části si rozbereme význam homogenosti funkce v teorii spotřebitele. Tento pojem však nabývá ještě většího významu v teorii firmy, proto se k němu v budoucnosti ještě vrátíme.

Definice 2.1.7 Říkáme, že funkce je **homogenní stupně** a v proměnných $x_1, x_2, \cdot, x_n$, jestliže pro všechna $t \in \mathbb{R}$

$$f(c \cdot x_1, c \cdot x_2, \ldots, c \cdot x_n, y_1, y_2, \ldots y_n) = f^a(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots y_n). \tag{2.33}$$

Tento pojem si v příkladu ilustrujeme na Marshallových poptávkách.

Nyní si definujme pojem Engelových křivek.

Definice 2.1.8 — Engelova křivka. **Engelova křivka** vyjadřuje množství nakupovaného zboží v závislosti na výši důchodu spotřebitele.

Konkrétní tvar Engelových křivek pro daného spotřebitele můžeme odvodit z jeho Marshallových poptávek.

■ **Příklad 2.7** Uvažujme spotřebitele s užitkovou funkcí

$$U = X \cdot Y + X + Y\,. \tag{2.34}$$

1. Určete Marshallovy poptávky po statcích X a Y.
2. Rozhodněte, zda je Marshallova poptávka po zboží X homogenní ve všech třech proměnných. Pokud ano, určete stupeň homogennosti.
3. Určete rovnici Engelovy křivky pro statek X.

Uvažujte, že $I = 100$, $P_X = 5$ a $P_Y = 10$.

Marshallovy poptávky jsou dány funkcemi

$$M_X(P_X, P_Y, I) = \frac{I - P_X + P_Y}{2P_X} \tag{2.35}$$

a

$$M_Y(P_X, P_Y, I) = \frac{I + P_X - P_Y}{2P_Y} \tag{2.36}$$

Pro naši Marshallovu poptávku platí rovnost

$$M_X(c \cdot P_X, c \cdot P_Y, a \cdot I) = \frac{c \cdot I - c \cdot P_X + c \cdot P_Y}{c \cdot 2 \cdot P_X}$$
$$= \frac{c\,(I - P_X + P_Y)}{c \cdot 2 \cdot P_X}$$
$$= \frac{I + P_X - P_Y}{P_Y}$$
$$= M_X^a(P_X, P_Y, I)$$

v případě, že $a = 0$. Marshallova poptávka je tedy homogenní funkcí stupně 0 ve všech proměnných.

R Tento poznatek má obrovský význam pro samotnou podstatu neoklasické mikroekonomie. Uvažujme následující situaci: V ekonomice dojde v extrémně krátkém čase ke zdvojnásobení všech cen i příjmů všech subjektů. Na základě homogennosti pak můžeme porovnat Marshallovy poptávky po této změně a před touto změnu a platí, že:

$$M_X(2 \cdot P_X, 2 \cdot P_Y, 2 \cdot I) = M_X(P_X, P_Y, I)\,. \tag{2.37}$$

Tj. ekonomické subjekty nebudou na tuto změnu nijak reagovat a budou se držet současného vzorce chování.

Vzpomeňme si nyní na kvantitativní rovnici směny. Jestliže by v ekonomice došlu ke změně cen bez změny objemu peněžné zásoby, bude docházet k tendencím k návratu k původní cenové hladině.

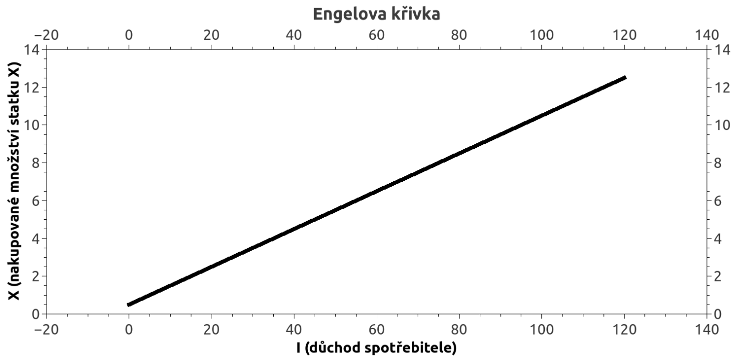
Důležitým závěrem tedy je, že v neoklasické ekonomii neuvažujeme papírové peníze ve smyslu kvantitativní rovnice peněz. Uvažujeme pouze poměrové ceny.

Do rovnice Marshallovy poptávky dosadíme P_X a P_Y.

$$X = \frac{I - P_X + P_Y}{2P_X} = \frac{I - 5 + 10}{10} = \frac{I}{10} + \frac{1}{2} \tag{2.38}$$

Do rovnice Marshallovy poptávky dosadíme P_X a P_Y.

$$X = \frac{I - P_X + P_Y}{2P_X} = \frac{I - 5 + 10}{10} = \frac{I}{10} + \frac{1}{2} \tag{2.39}$$



■

2.1.6 Další typy poptávek

Na záver této části si definujeme další dva typy poptávek. Cournotova poptávka je ve skutečnosti dobře známou poptávkou ze základního kurzu mikroekonomice, tedy funkce vyjadřujicí nakupované množství statku v závislosti na ceně tohoto konkrétního statku.

Definice 2.1.9 — Cournotova poptávka. Cournotova poptávka vyjadřuje množství nakupovaného zboží v závislosti na jeho ceně.

Význam křížové poptávky je intuitivně zřejmý.

Definice 2.1.10 — Křížová poptávka. Křížová poptávka po statku X vyjadřuje množství nakupovaného zboží statku X v závislosti na ceně statku Y.

■ **Příklad 2.8** Uvažujme spotřebitele s užitkovou funkcí

$$U = X \cdot Y + X + Y\,. \tag{2.40}$$

1. Určete Marshallovy poptávky po statcích X a Y.
2. Rozhodněte, zda je Marshallova poptávka po zboží X homogenní ve všech třech proměnných. Pokud ano, určete stupeň homogennosti.
3. Určete rovnici Cournotovy poptávky pro statek X.
4. Určete rovnici křížové poptávky pro statek X.

Uvažujte, že $I = 100$, $P_X = 5$ a $P_Y = 10$.

Marshallovy poptávky jsou dány funkcemi

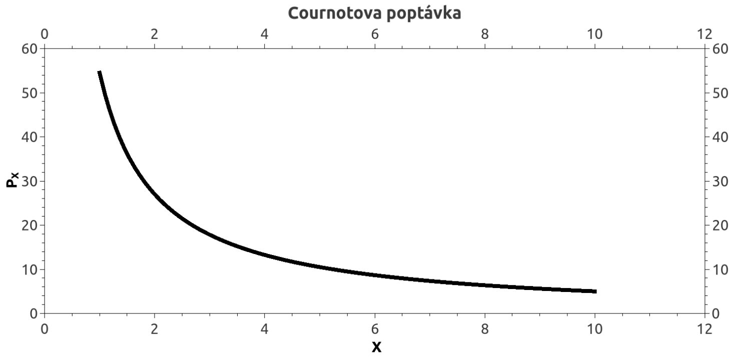
$$M_X(P_X, P_Y, I) = \frac{I - P_X + P_Y}{2P_X} \tag{2.41}$$

a

$$M_Y(P_X, P_Y, I) = \frac{I + P_X - P_Y}{2P_Y} \tag{2.42}$$

Do rovnice Marshallovy poptávky dosadíme I a P_Y.

$$X = \frac{I - P_X + P_Y}{2P_X} = \frac{100 - P_X + 10}{2P_X} = \frac{55}{P_X} - \frac{1}{2} \tag{2.43}$$



Do rovnice Marshallovy poptávky dosadíme I a P_X.

$$X = \frac{I - P_X + P_Y}{2P_X} = \frac{100 - 5 + P_Y}{10} = \frac{95}{10} - \frac{P_Y}{10} = 9{,}5 - \frac{P_Y}{10} \tag{2.44}$$

■

2.2 Hicksova úloha

Alternativou k Marshallově úloze je Hicksova úloha. Přesněji řečeno, Hicksova úloha je duální úlohou k Marshallově úloze (viz pojem dualita úloh v teorii optimilizace). Zatímco v případě Marshallovy úlohy jsme maximalizovali užitek spotřebitele při daném a fixním příjmu, u Hicksovy úlohy minimalizujeme výdaje spotřebitele na dosažení určité požadované (a fixní) hodnoty užitku.

Definice 2.2.1 Hicksovou úlohou myslíme minimalizaci výdajů na nákup zboží při dané požadované úrovni užitku, tj.

$$\begin{aligned} \min_{X,Y} \quad & P_X \cdot X + P_Y \cdot Y \\ \text{za podmínky} \quad & U(X,Y) = C. \end{aligned} \tag{2.45}$$

V případě Hicksovy úlohy tedy hraje důležitou úlohu požadovaná výše užitkové funkce ze spotřeby, která musí dosáhnout hodnoty C, aby bylo řešení úlohy platné.

■ **Příklad 2.9** Určete podmínku, která zaručuje minimalizaci výdajů. Lagrangeova funkce má tvar

$$\mathscr{L} = P_X \cdot X + P_Y \cdot Y + \lambda(U(X,Y) - C). \tag{2.46}$$

Určíme si její parciální derivace

$$\frac{\partial \mathscr{L}(X,Y,\lambda)}{\partial X} = P_X + \lambda \cdot MU_X(X,Y) = 0$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}(X,Y,\lambda)}{\partial Y} = P_Y + \lambda \cdot MU_Y(X,Y) = 0$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}(X,Y,\lambda)}{\partial \lambda} = U(X,Y) - C = 0$$

Pokud si z obou rovnic vyjádříme λ:

$$\lambda = -\frac{P_X}{MU_X(X,Y)} = -\frac{P_Y}{MU_Y(X,Y)} . \tag{2.47}$$

Úpravou této rovnice získáme podmínku maximalizace užitku:

$$\frac{MU_X(X,Y)}{MU_Y(X,Y)} = \frac{P_X}{P_Y} , \tag{2.48}$$

tedy poměr mezních užitků se rovná poměru cen zboží. ■

Definice 2.2.2 **Hicksova poptávka** spotřebitele po statku X je funkcí požadované úrovně užitku spotřebitele a cen P_X a P_Y a udává množství statku X, které spotřebitel poptává, jestliže minimalizuje své peněžní výdaje.

■ **Příklad 2.10** Uvažujme spotřebitele s Cobb-Douglasovou užitkovou funkcí

$$U = X \cdot Y . \tag{2.49}$$

Určete Hicksovy poptávky spotřebitele po statcích X a Y.

Řešíme následující problém

$$\begin{aligned} &\min_{X,Y} && P_X \cdot X + P_Y \cdot Y \\ &\text{za podmínky} && X \cdot Y = C . \end{aligned} \tag{2.50}$$

Poznámka: V tomto případě nelze provést pozitivně-monotónní transformaci.

Vyjádřením proměnných X a Y z úlohy získáme Hicksovy poptávky po statcích X a Y.

Lagrangeova funkce má tvar

$$\mathscr{L} = P_X \cdot X + P_Y \cdot Y + \lambda(X \cdot Y - C) . \tag{2.51}$$

Určíme si její parciální derivace

$$\frac{\partial \mathscr{L}(X,Y,\lambda)}{\partial X} = P_X + \lambda \cdot Y = 0$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}(X,Y,\lambda)}{\partial Y} = P_Y + \lambda \cdot X = 0$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}(X,Y,\lambda)}{\partial \lambda} = X \cdot Y - C = 0$$

Z prvních dvou rovnic si vyjádříme proměnnou λ:

$$\lambda = -\frac{P_X}{Y} = -\frac{P_Y}{X}$$

Do první parciální derivace dosadíme $\lambda = -\frac{P_Y}{X}$:

$$P_X - Y\frac{P_Y}{X} = 0 \tag{2.52}$$

Provedeme úpravu:

$$P_X = Y\frac{P_Y}{X} \tag{2.53}$$

a podle třetí parciální derivace dosadíme $Y = \frac{C}{X}$:

$$P_X = \frac{P_Y}{X} \cdot \frac{C}{X} \tag{2.54}$$

Protože $P_X > 0$, $P_Y > 0$, $X > 0$ a $Y > 0$, je Hicksova poptávka ve tvaru

$$X = \sqrt{C\frac{P_Y}{P_X}} \tag{2.55}$$

Do druhé parciální derivace dosadíme $X = \sqrt{C\frac{P_Y}{P_X}}$ a $\lambda = -\frac{P_X}{Y}$:

$$P_Y - \frac{P_X}{Y}\sqrt{C\frac{P_Y}{P_X}} = 0 \tag{2.56}$$

Provedeme úpravu:

$$\frac{1}{Y} = \frac{P_Y}{P_X\sqrt{C\frac{P_Y}{P_X}}} \tag{2.57}$$

Tím získáme Hicksovu poptávku po Y:

$$Y = \sqrt{C\frac{P_X}{P_Y}} \tag{2.58}$$

Hicksova poptávka spotřebitele po statku X je

$$H_X = \sqrt{C\frac{P_Y}{P_X}} \tag{2.59}$$

a poptávka po Y je

$$H_Y = \sqrt{C\frac{P_X}{P_Y}}. \tag{2.60}$$

■

2.2.1 Výdajová funkce

K Hicksově úloze se váže výdajová funkce, která poskytuje informaci o výdajích spotřebitele na základě požadované dosažené úrovně užitku.

Definice 2.2.3 Výdajová funkce spotřebitele je funkcí požadované úrovně užitku a cen poptávaných statků a udává objem výdajů, které spotřebitel optimalizující výdaje utratí za spotřební statky.

■ **Příklad 2.11** Uvažujme spotřebitele s Cobb-Douglasovou užitkovou funkcí

$$U = X \cdot Y\,. \tag{2.61}$$

S využitím znalosti Hicksových poptávek určete výdajovou funkci spotřebitele po statcích X a Y.

Uvažujme, že $X^\star$ a $Y^\star$ jsou optimální množství nakupovaného zboží pří požadované úrovni užitku C. Pak odvodíme výdajovou funkci jako

$$\begin{aligned}
E(P_X, P_Y, C) &= P_X \cdot X^\star + P_Y \cdot Y^\star \\
&= P_X \cdot H_X + P_Y \cdot H_Y \\
&= P_X \cdot \sqrt{C\frac{P_Y}{P_X}} + P_Y \cdot \sqrt{C\frac{P_X}{P_Y}} \\
&= \sqrt{C \cdot P_X \cdot P_Y} + \sqrt{C \cdot P_X \cdot P_Y} \\
&= 2\sqrt{C \cdot P_X \cdot P_Y}
\end{aligned}$$

Výdajová funkce spotřebitele je

$$E(P_X, P_Y, C) = 2\sqrt{C \cdot P_X \cdot P_Y} \tag{2.62}$$

■

2.2.2 Nepřímá funkce užitku

■ **Příklad 2.12** Uvažujme spotřebitele s Cobb-Douglasovou užitkovou funkcí

$$U = X \cdot Y\,. \tag{2.63}$$

Z výdajové funkce určete nepřímou funkci užitku spotřebitele.

Při požadované úrovni užitku C jsou výdaje spotřebitele dány výdajovou funkcí. Jestliže je důchod spotřebitele I a spotřebitel vynakládá celý svůj důchod, pak musí platit

$$I = E(P_X, P_Y, C) = 2\sqrt{C \cdot P_X \cdot P_Y} \tag{2.64}$$

Z rovnice (2.64) si vyjádříme požadovanou úroveň užitku C:

$$C = \frac{I^2}{4 \cdot P_X \cdot P_Y}\,. \tag{2.65}$$

Pravá část tedy udává velikost užitku racionálního spotřebitele v závislosti na důchodu a cenách zboží, přičemž rovnost platí obecně. Tím jsme vlastně odvodili nepřímou funkci užitku

$$V(P_X, P_Y, I) = \frac{I^2}{4 \cdot P_X \cdot P_Y} \tag{2.66}$$

■

2.2.3 Sheppardova poučka

Máme-li k dispozici výdajovou funkci, můžeme z ní snadno zpětně odvodit Hicksovy poptávky. Způsob, jakým toto odvození provedeme, nám říká Sheppardova poučka.

Věta 2.2.1 — Sheppard, 1953. Hicksovu poptávku spotřebitele po statku X získáme derivací výdajové funkce podle P_X, tj.

$$H_X(P_X, P_Y, C) = \frac{\partial E(P_X, P_Y, C)}{\partial P_X} \tag{2.67}$$

Sheppar

■ **Příklad 2.13** Uvažujme spotřebitele s Cobb-Douglasovou užitkovou funkcí

$$U = X \cdot Y\,. \tag{2.68}$$

Z výdajové funkce určete Hicksovy poptávky spotřebitele.

Určíme derivaci výdajové funkce podle P_X:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E(P_X, P_Y, C)}{\partial P_X} &= \left[2\sqrt{C \cdot P_X \cdot P_Y}\right]'_{P_X} \\
&= \frac{2C \cdot P_Y}{\sqrt{C \cdot P_X \cdot P_Y}} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \sqrt{C \frac{P_Y}{P_X}} \\
&= H_X(P_X, P_Y, C)
\end{aligned} \tag{2.69}$$

■

2.3 Slutského rozklad

Dojde-li ke změně spotřebního zboží, dochází ve většině případů k poklesu nakupovaného množství zboží konkrétním spotřebitelem. Při podrobnějším zkoumání tohoto jevu však dojdeme k závěru, že spotřebitel má dva důvody k tomu, aby snížil nakupované množství zboží:

- zboží se pro něj stalo relativně dražším a spotřebitel má větší tendenci nahrazovat ho dostupnými substituty,
- při kontantní nominální hodnotě jeho důchodu dochází k reálnímu poklesu jeho hodnoty, protože jedna z položek jeho spotřebního koše má vyšší cenu a ostatní položky mají stále stejnou cenu (tj. spotřebitel již není schopen nakupovat původní spotřební koš).

Na základě této úvahy můžeme definovat substituční a důchodový efekt.

Definice 2.3.1 — Substituční efekt. **Substituční efekt** poptávky po zboží X je změna poptávky po zboží X daná vlivem změny poměru cen P_X a P_Y, přičemž uvažujeme konstantní reálnou hodnotu důchodu.

Definice 2.3.2 — Důchodový efekt. Důchodový efekt poptávky po zboží X je změna poptávky po zboží X daná vlivem změny reálného důchodu v důsledku změny P_X při zachování konstantního poměru cen P_X a P_Y.

■ **Příklad 2.14** Marshallova poptávka spotřebitele po statku X je dána vztahem

$$M_X(P_X, I) = 10 + \frac{I}{10 \cdot P_X}. \tag{2.70}$$

Původně byla výše důchodu spotřebitele $I = 120$ a cena zboží $P_{X,0} = 3$. Nyní cena zboží klesne na $P_{X,1} = 2$. Určete velikost substitučního a důchodového efektu.

Při výpočtu využijeme tzv. pomocnou *nominální* hodnotu důchodu, kterou si označíme jako I_P.

Ve výchozí situaci platí

$$I = P_{X,0} \cdot X_0 + P_{Y,0} \cdot Y_0. \tag{2.71}$$

V situaci, kdy došlo ke změně poměru cen, ale uvažujeme konstantní reálnou hodnotu důchodu, platí

$$I_P = P_{X,1} \cdot X_0 + P_{Y,0} \cdot Y_0. \tag{2.72}$$

R Používáme Slutského definici konstantního reálného důchodu.

Odečtením obou rovnic získáme:

$$I_P - I = X_0 \cdot (P_{X,1} - P_{X,0}). \tag{2.73}$$

Jestliže $\Delta I = I_P - I$ a $\Delta P_X = P_{X,1} - P_{X,0}$, pak lze rovnici přepsat jako

$$\Delta I = X_0 \cdot (P_{X,1} - P_{X,0}) = X_0 \cdot \Delta P_X. \tag{2.74}$$

Ve výchozí situaci platí:

$$M_X(P_{X,0}, P_Y, I) = 10 + \frac{I}{10 \cdot P_{X,0}} = 10 + \frac{120}{30} = 14. \tag{2.75}$$

Určíme hodnotu pomocného důchodu:

$$I_P = X_0 \cdot (P_{X,1} - P_{X,0}) + I = 14 \cdot (2 - 3) + 120 = 106. \tag{2.76}$$

Nyní určíme velikost poptávky pro $P_{X,1}$, P_Y a I_P:

$$M_X(P_{X,1}, P_Y, I_P) = 10 + \frac{106}{20} = 15{,}3. \tag{2.77}$$

Velikost substitučního efektu je

$$M_X(P_{X,1}, P_Y, I_P) - M_X(P_{X,0}, P_Y, I) = 15{,}3 - 14 = 1{,}3. \tag{2.78}$$

Pro koncovou situaci platí:

$$M_X(P_{X,1}, P_Y, I) = 10 + \frac{I}{10 \cdot P_{X,0}} = 10 + \frac{120}{20} = 16. \tag{2.79}$$

Velikost důchodového efektu je

$$M_X(P_{X,1}, P_Y, I) - M_X(P_{X,1}, P_Y, I_P) = 16 - 15{,}3 = 0{,}7. \tag{2.80}$$

■

2.4 Přímo projevené preference

Teorie přímo projevených preferencí je doplňkem k teorii spotřebitele. Cílem této teorie je porovnání životní situace jednoho spotřebitele ve více časových obdobích a určení, zda došlo k jejímu zlepšení nebo zhoršení. Teorie využívá pět typů indexů, které si postupně definujeme. Pro zjednodušení budeme opět uvažovat dva druhy spotřebního zboží – X a Y.

Autorem této teorie je americký ekonom Paul Samuelson.

2.4.1 Množstevní indexy

Nejprve si popíšeme množstevní indexy. V případě množstevních indexů dosazujeme do jednoho indexu vždy nakoupená množství zboží ze dvou různých období. Cena zboží se vždy dosazuje do jednoho indexu pouze z jednoho období a slouží jako váha. Podle toho, zda se jedná o Laspeyresův nebo Paascheho index, pak volíme ceny ze základního nebo běžného období. Základní období budeme značit indexem 0 a současné období indexem 1.

Pomocí této logiky můžeme snadno sestavit vzorce pro oba indexy. Nejprve si definujeme Laspeyresův množstevní index.

Definice 2.4.1 — Laspeyresův množstevní index. Laspeyresův množstevní index L_Q je dán vztahem

$$L_Q = \frac{P_{X,0} \cdot X_1 + P_{Y,0} \cdot Y_1}{P_{X,0} \cdot X_0 + P_{Y,0} \cdot Y_0} \tag{2.81}$$

Změníme-li váhy z cen základního období na ceny běžného období, získáme Paascheo množstevení index.

Definice 2.4.2 — Paascheho množstevní index. Paascheho množstevní index P_Q je dán vztahem

$$P_Q = \frac{P_{X,1} \cdot X_1 + P_{Y,1} \cdot Y_1}{P_{X,1} \cdot X_0 + P_{Y,1} \cdot Y_0} \tag{2.82}$$

Následující věta nám dává návod, jak pomocí množstevních indexů rozhodnout o životní situaci spotřebitele.

Věta 2.4.1 Na základě množstevních indexů lze provést následující rozhodnutí o životní situaci spotřebitele

- Jestliže $L_Q < 1$, došlo k poklesu životní úrovně spotřebitele.
- Jestliže $L_Q > 1$, nelze o změně životní úrovně rozhodnout.
- Jestliže $P_Q < 1$, nelze o změně životní úrovně rozhodnout.
- Jestliže $P_Q > 1$, došlo k růstu životní úrovně spotřebitele.

Početní příklady jsou u množstevních indexů jednoduché – stačí pouze dosadit do vzorce.

R Není nutné se tyto vzorce učit zpaměti, postačí pamatovat si informaci o tom, že Laspeyresův index využívá jako váhy ceny základního období a Paascheho index ceny běžného období. Pak už je jednoduché si vzorce indexů odvodit.

■ **Příklad 2.15** Spotřebitel nakupuje dva druhy statků: X a Y. Původně byla cena P_X 4 Kč a P_Y 4 Kč a spotřebitel nakupoval 4 kusy statku X a 4 kusy statku Y. V dalším roce klesla P_X na 2 Kč a P_Y stoupla na 9 a spotřebitel nakupoval 5 kusů X a 2 kusy Y. Porovnejte životní situaci spotřebitele za použití Laspeyresova a Paascheho množstevního indexu.

Dosadíme do vzorce:

$$L_Q = \frac{4 \cdot 5 + 4 \cdot 2}{4 \cdot 4 + 4 \cdot 4} = \frac{28}{32} < 1\,. \tag{2.83}$$

Protože $L_Q < 1$, došlo k poklesu životní úrovně spotřebitele.

Dosadíme do vzorce:

$$L_Q = \frac{2 \cdot 5 + 9 \cdot 2}{2 \cdot 4 + 9 \cdot 4} = \frac{28}{44} < 1\,. \tag{2.84}$$

Protože $P_Q < 1$, nelze rozhodnout o změně situace spotřebitele. ■

2.4.2 Cenové indexy

Alternativou k množstevním indexům jsou cenové indexy. U množstevních indexů využíváme nakupovaná množství jako váhy a měníme dosazované ceny zboží.

Abychom mohli provést rozhodnutí o tom, jestli se životní situace spotřebitele zlepšila nebo zhoršila, musíme hodnotu cenového indexu porovnávat s tzv. indexem výdajů. Tento index je poměrem celkových výdajů spotřebitele v základním a běžném období, sestavení vzorce v následující definici je tedy velmi intuitivní.

Definice 2.4.3 — Index výdajů. Index výdajů je dán vztahem

$$M = \frac{I_1}{I_0} = \frac{P_{X,1} \cdot X_1 + P_{Y,1} \cdot Y_1}{P_{X,0} \cdot X_0 + P_{Y,0} \cdot Y_0} \tag{2.85}$$

I u cenových indexů platí, že u Laspeyresova indexu volíme váhy ze základního období a u Paascheho indexu váhy z běžného období. Sestavení obou vzorců by tedy nemělo činit problém.

Definice 2.4.4 — Laspeyresův cenový index. Laspeyresův cenový index L_P je dán vztahem

$$L_P = \frac{P_{X,1} \cdot X_0 + P_{Y,1} \cdot Y_0}{P_{X,0} \cdot X_0 + P_{Y,0} \cdot Y_0} \tag{2.86}$$

Definice 2.4.5 — Paascheho cenový index. Paascheho cenový index P_P je dán vztahem

$$P_P = \frac{P_{X,1} \cdot X_1 + P_{Y,1} \cdot Y_1}{P_{X,0} \cdot X_1 + P_{Y,0} \cdot Y_1} \tag{2.87}$$

K cenovým indexům bychom mohli sestavit analogickou větu k větě 2.4.1, která nám říká, kdy se situace spotřebitele zlepšila, kdy zhoršila a kdy o ní nelze rozhodnout. U těchto indexů to však není nutné, protože nám postačí právě věta 2.4.1. V následujícím příkladě si ukážeme, jak pomocí ekvivalentní úpravy snadno převést porovnání cenového indexu a indexu výdajů na porovnání množstevního indexu a čísla 1.

■ **Příklad 2.16** Spotřebitel nakupuje dva druhy statků: X a Y. Původně byla cena P_X 1 Kč a P_Y 3 Kč a spotřebitel nakupoval 4 kusy statku X a 1 kus statku Y. V dalším roce klesla P_X i P_Y na 2 Kč a spotřebitel nakupoval 4 kusy X a 2 kusy Y. Porovnejte životní situaci spotřebitele za použití Laspeyresova a Paascheho cenového indexu.

Dosadíme do vzorce:

$$L_P = \frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot 2}{1 \cdot 4 + 3 \cdot 1} = \frac{10}{7}. \tag{2.88}$$

Dále určíme hodnotu cenového indexu M:

$$M = \frac{2 \cdot 4 + 2 \cdot 2}{1 \cdot 4 + 3 \cdot 1} = \frac{12}{7}. \tag{2.89}$$

Víme tedy, že index výdajů má vyšší hodnotu než Laspeyresův cenový index, tj:

$$L_P < M.$$

Rozepišme si nyní vzorce pro oba indexy:

$$\frac{P_{X,1} \cdot X_0 + P_{Y,1} \cdot Y_0}{P_{X,0} \cdot X_0 + P_{Y,0} \cdot Y_0} < \frac{P_{X,1} \cdot X_1 + P_{Y,1} \cdot Y_1}{P_{X,0} \cdot X_0 + P_{Y,0} \cdot Y_0}$$

Vidíme, že jmenovatele zlomků na obou stranách nerovnosti jsou stejné a můžeme je tedy vykrátit. Protože jmenovatel $(P_{X,0} \cdot X_0 + P_{Y,0} \cdot Y_0)$ obsahuje pouze nezáporné hodnoty, je tato úprava platná a neměníme při ní znaménko nerovnosti. Po této úpravě nám zbývá následující nerovnost:

$$P_{X,1} \cdot X_0 + P_{Y,1} \cdot Y_0 < P_{X,0} \cdot X_0 + P_{Y,0} \cdot Y_0.$$

Upravme si nyní nerovnici tak, abychom na levé straně měli jedničku, tj. celou rovnici vydělíme výrazem $(P_{X,1} \cdot X_0 + P_{Y,1} \cdot Y_0)$:

$$1 < \frac{P_{X,1} \cdot X_0 + P_{Y,1} \cdot Y_0}{P_{X,0} \cdot X_0 + P_{Y,0} \cdot Y_0}$$

Ale zde ve výrazu na pravé straně nerovnice snadno poznáme, že se jedná po Paascheho množstevní index, tj. výraz je identický s P_Q, což můžeme snadno dosadit

$$P_Q > 1 \tag{2.90}$$

a podle věty 2.4.1 pak můžeme vyslovit závěr, že situace spotřebitele se zlepšila.

Nyní použijeme Paascheho cenový index. Dosadíme do vzorce:

$$P_P = \frac{2 \cdot 4 + 2 \cdot 2}{1 \cdot 4 + 3 \cdot 2} = \frac{12}{10}. \tag{2.91}$$

Hodnota Paascheho cenový indexu je menší, než hodnota výdajového indexu, tj. platí nerovnost:

$$P_P < M \tag{2.92}$$

Abychom mohli výsledek interpretovat, do nerovnosti si dosadíme výrazy definující Paascheho cenový index a index výdajů:

$$\frac{P_{X,1} \cdot X_1 + P_{Y,1} \cdot Y_1}{P_{X,0} \cdot X_1 + P_{Y,0} \cdot Y_1} < \frac{P_{X,1} \cdot X_1 + P_{Y,1} \cdot Y_1}{P_{X,0} \cdot X_0 + P_{Y,0} \cdot Y_0} \tag{2.93}$$

Protože výrazy v čitatelích obou dvou zlomků jsou totožné, můžeme celou nerovnost vydělit výrazem $P_{X,1} \cdot X_1 + P_{Y,1} \cdot Y_1$. Protože uvažujeme pouze kladná množství nakupovaného zboží a kladné ceny, nezmění nám tato operace znaménko nerovnosti. V čitatelích obou zlomků nyní máme čísla 1, jmenovatele se nezměnily.

$$\frac{1}{P_{X,0} \cdot X_1 + P_{Y,0} \cdot Y_1} < \frac{1}{P_{X,0} \cdot X_0 + P_{Y,0} \cdot Y_0} \tag{2.94}$$

Proveďme nyní ještě jednu úpravu. Vynásobme obě strany nerovnosti hodnotou ve jmenovateli zlomku vlevo, tj. výrazem $P_{X,0} \cdot X_1 + P_{Y,0} \cdot Y_1$ (opět nedochází ke změně v nerovnosti). Tím získáme na levé straně nerovnosti jedničku. Na pravé straně pak vidíme, že daný zlomek odpovídá množstevnímu indexu, protože obsahuje pouze ceny ze základního období a množství ze základního i běžného období. Na základě toho, že ceny jsou ze základního období, můžeme navíc konstatovat, že se jedná o Laspeyresův množstevní index.

$$1 < \frac{P_{X,0} \cdot X_1 + P_{Y,0} \cdot Y_1}{P_{X,0} \cdot X_0 + P_{Y,0} \cdot Y_0}$$

$$L_Q > 1$$

Protože Laspeyresův množstevní index je větší než 1, musíme na základě věty 2.4.1 konstatovat, že o změně situace spotřebitele nelze rozhodnout. ■

Dvoustupňová metoda
Přímá metoda
Funkce zisku

3. Teorie firmy

Definice 3.0.6 **Funkce zisku** π udává zisk firmy v závislosti na ceně práce w, ceně kapitálu r a prodejní ceně zboží P.

Dvoustupňová metoda předpokládá nejprve minimalizaci nákladů (tj. odvození funkce LTC). Poté řešíme úlohu:

$$\begin{aligned} &\max_{Q} && \pi = P\cdot Q - LCT(w,r,Q) \\ &\text{za podmínky} && Q \geq 0\,. \end{aligned} \tag{3.1}$$

3.1 Dvoustupňová metoda

■ **Příklad 3.1** Výroba firmy je charakterizovaná produkční funkcí

$$Q = f(K,L) = K^{\frac{1}{2}} + L^{\frac{1}{2}} \tag{3.2}$$

Firma nakupuje práci za cenu w, kapitál za cenu r a prodává své výrobky za cenu P. Dvoustupňovou metodou a s využitím znalosti funkce

$$LTC = \frac{Q^2\cdot r\cdot w}{w+r} \tag{3.3}$$

určete funkci nabídky a funkci zisku firmy.

Určíme parciální derivaci funkce zisku podle Q a položíme rovnu 0:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = P - LMC(w,r,Q) = 0 \tag{3.4}$$

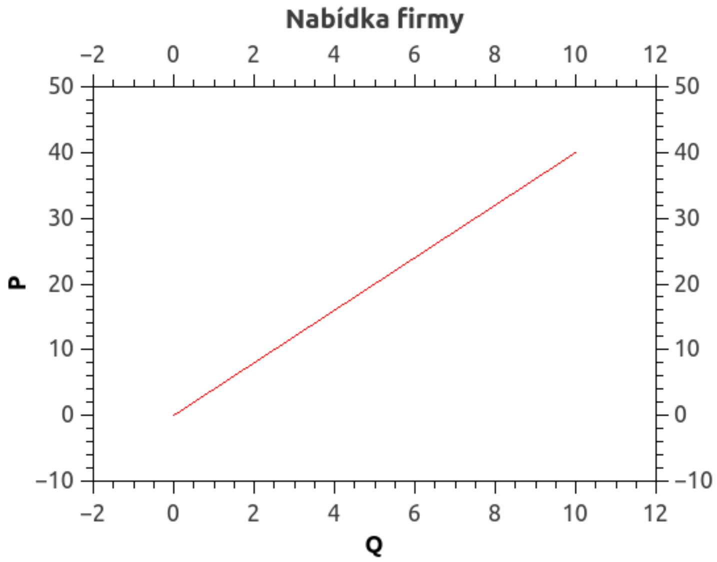
Je zřejmé, že

$$P = LMC(w,r,Q) = \left[\frac{Q^2\cdot r\cdot w}{r+w}\right]'_Q = \frac{2Q\cdot r\cdot w}{r+w} \tag{3.5}$$

Z parciální derivace určíme funkci nabídky Q.

$$\frac{1}{Q} = \frac{2 \cdot r \cdot w}{P(r+w)} \tag{3.6}$$

$$Q = \frac{P \cdot (w+r)}{2 \cdot r \cdot w} \tag{3.7}$$



■

3.2 Přímá metoda

Při přímé metodě řešíme úlohu

$$\begin{aligned} &\max_{K,L} && \pi = P \cdot Q(K,L) - w \cdot L - r \cdot K \\ &\text{za podmínek} && K \geq 0, L \geq 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

(Nepodmíněná) poptávka po výrobním faktoru je funkcí ceny finálního produktu P a ceny daného výrobních faktoru (a nezávisí na ceně dalších výrobních faktorů !)

■ **Příklad 3.2** Výroba firmy je charakterizovaná produkční funkcí

$$f(K,L) = K^{\frac{1}{2}} + L^{\frac{1}{2}} \tag{3.9}$$

Firma nakupuje práci za cenu w, kapitál za cenu r a prodává své výrobky za cenu P. Odvoďte funkci poptávky po kapitálu, poptávky po práci a funkci zisku π.

V našem případě platí

$$\pi(K,L) = P \cdot (K^{\frac{1}{2}} + L^{\frac{1}{2}}) - w \cdot L - r \cdot K\,. \tag{3.10}$$

Vzhledem k obecným předpokladům na produkční funkci stačí určit optimum na základě podmínek prvního řádu.

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = 0 \tag{3.11}$$

$$\left[P \cdot \left(K^{\frac{1}{2}} + L^{\frac{1}{2}}\right) - w \cdot L - r \cdot K\right]_K' = 0$$

$$P \cdot MP_K - r = 0$$

$$P \cdot K^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} - r = 0$$

V optimu musí platit

$$P \cdot MP_K = r, \tag{3.12}$$

tedy mezní platba za výrobní faktor r se rovná meznímu příjmu z výrobního faktoru $P \cdot MP_K$.

Vyjádříme s nyní K, abychom získali poptávku po kapitálu.

$$K^{-\frac{1}{2}} = \frac{r \cdot 2}{P}$$

$$K = \frac{P^2}{4 \cdot r^2}$$

Poptávka po práci je funkcí závislou na ceně práce w a ceně zboží P.

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = 0$$

$$= \left[P \cdot \left(K^{\frac{1}{2}} + L^{\frac{1}{2}}\right) - w \cdot L - r \cdot K\right] = 0$$

$$= P \cdot MP_L - r = P \cdot L^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} - w = 0$$

$$L^{-\frac{1}{2}} = \frac{w \cdot 2}{P}$$

$$L = \frac{P^2}{4 \cdot w^2}$$

Poptávka po kapitálu je dána vztahem $K = \frac{P^2}{4 \cdot r^2}$ a poptávka po práci vztahem $L = \frac{P^2}{4 \cdot w^2}$. Zisk odvodíme dosazením funkcí poptávek K a L do funkce zisku.

$$\pi(K,L) = P \cdot (K^{\frac{1}{2}} + L^{\frac{1}{2}}) - w \cdot L - r \cdot K$$

$$= P \cdot ((\frac{P^2}{4 \cdot r^2})^{\frac{1}{2}} + (\frac{P^2}{4 \cdot w^2})^{\frac{1}{2}}) - w \cdot (\frac{P^2}{4 \cdot w^2}) - r \cdot (\frac{P^2}{4 \cdot r^2})$$

$$= P \cdot (\frac{P}{2 \cdot r} + \frac{P}{2 \cdot w}) - w \cdot (\frac{P^2}{4 \cdot w^2}) - r \cdot (\frac{P^2}{4 \cdot r^2})$$

$$= \frac{P^2}{2 \cdot r} + \frac{P^2}{2 \cdot w} - \frac{P^2}{4 \cdot w} - \frac{P^2}{4 \cdot r}$$

$$= \frac{2 \cdot P^2 - P^2}{4 \cdot r} + \frac{2 \cdot P^2 - P^2}{4 \cdot w}$$

$$
\begin{aligned}
\pi(K,L) &= \frac{2\cdot P^2 - P^2}{4\cdot r} + \frac{2\cdot P^2 - P^2}{4\cdot w} \\
&= \frac{P^2}{4\cdot r} + \frac{P^2}{4\cdot w} \\
&= \frac{P^2\cdot w + P^2\cdot r}{4\cdot w\cdot r} \\
&= \frac{P^2\cdot (w+r)}{4\cdot w\cdot r}
\end{aligned}
$$

Funkci zisku jsme opět odvodili jako $\pi = \frac{P^2\cdot(w+r)}{4\cdot w\cdot r}$. Funkce zisku je stejná jako při výpočtu dvoustupňovou metodou. ■

3.2.1 Funkce zisku

Věta 3.2.1 Funkci nabídky lze z funkce zisku odvodit pomocí vztahu

$$\frac{\partial\pi(w,r,P)}{\partial P} = Q(w,r,P)\,, \tag{3.13}$$

tj. zderivujeme funkce zisku podle ceny.

Věta 3.2.2 Funkci poptávky po práci lze z funkce zisku odvodit pomocí vztahu

$$\frac{\partial\pi(w,r,P)}{\partial w} = -L(w,P)\,. \tag{3.14}$$

Věta 3.2.3 Funkci poptávky po kapitálu lze z funkce zisku odvodit pomocí vztahu

$$\frac{\partial\pi(w,r,P)}{\partial r} = -K(r,P)\,. \tag{3.15}$$

V následujícím příkladě je použito pravidlo o derivaci součinu, které si zde pro úplnost uvedeme.

Věta 3.2.4 Uvažujme funkce $f(x)$ a $g(x)$. Jejich podíl

$$\frac{f(x)}{g(x)} \tag{3.16}$$

derivujeme podle vzorce

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]_x' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}\,. \tag{3.17}$$

■ **Příklad 3.3** Z funkce zisku, která je dána vztahem

$$\pi(w,r,P) = \frac{P^2\cdot(w+r)}{4\cdot w\cdot r}\,, \tag{3.18}$$

určete funkci nabídky poptávky po kapitálu a poptávky po práci.

$$\frac{\partial \pi(w,r,P)}{\partial P} = \left[\frac{P^2 \cdot (w+r)}{4 \cdot w \cdot r}\right]_P^{\prime}$$

$$= \frac{2P\,(r+w)}{4r \cdot w} = \frac{P\,(r+w)}{2r \cdot w} = Q(w,r,P)$$

$$\frac{\partial \pi(w,r,P)}{\partial w} = \left[\frac{P^2 \cdot (w+r)}{4 \cdot w \cdot r}\right]_w^{\prime}$$

$$= \frac{4P^2 \cdot w \cdot r - 4P^2(w+r) \cdot r}{16 \cdot w^2 \cdot r^2}$$

$$= P^2 \frac{4w \cdot r - 4w \cdot r - 4r^2}{16 \cdot w^2 \cdot r^2}$$

$$= P^2 \frac{-1}{4 \cdot w^2} = -L(w,P)$$

$$\frac{\partial \pi(w,r,P)}{\partial r} = \left[\frac{P^2 \cdot (w+r)}{4 \cdot w \cdot r}\right]_r^{\prime}$$

$$= \frac{4P^2 \cdot w \cdot r - 4P^2(w+r) \cdot w}{16 \cdot w^2 \cdot r^2}$$

$$= P^2 \frac{4w \cdot r - 4w \cdot r - 4w^2}{16 \cdot w^2 \cdot r^2}$$

$$= P^2 \frac{-1}{4 \cdot r^2} = -K(r,P)$$

■

■ **Příklad 3.4** Funkce zisku je dána vztahem

$$\pi(w,r,P) = \frac{P^2 \cdot (w+r)}{4 \cdot w \cdot r}. \tag{3.19}$$

Určete stupeň homogenity funkce ve všech proměnných. Dále zakreslete funkci vyjadřující velikost zisku v závislosti na ceně při $w = 3$ a $r = 6$.

$$\pi(c \cdot w, c \cdot r, c \cdot P)$$

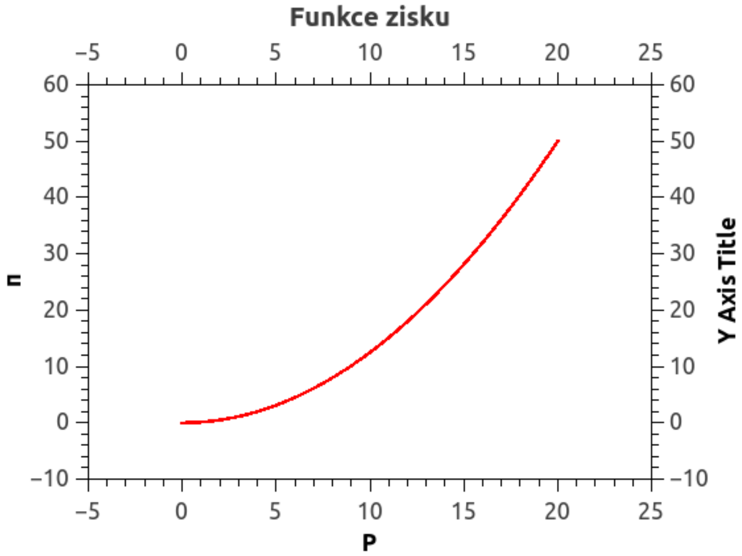
$$= \frac{(c \cdot P)^2 \cdot (c \cdot w + c \cdot r)}{4 \cdot (c \cdot w) \cdot (c \cdot r)}$$

$$= \frac{c^2 \cdot P^2 \cdot c(w+r)}{4 \cdot c \cdot w \cdot c \cdot r}$$

$$= \frac{c^3 \cdot P^2(w+r)}{4 \cdot c^2 \cdot w \cdot r}$$

$$= c\frac{P^2(w+r)}{4 \cdot w \cdot r}$$

$$= c^1 \cdot \pi(w,r,P)$$



Funkce zisku je homogenní stupně 1 ve všech proměnných.

■

Základní DSGE model
Stochastické šoky
Walsrasův aukcionář
Základní DSGE model
Numerické řešení a simulace
Model s exogenní nabídkou práce
Model s endogenní nabídkou práce

4. DSGE modely

Jednou z nejmodernějších součástí ekonomie je výzkum DSGE modelů, neboli dynamických stochastických modelů všeobecné rovnováhy. Tento typ modelů je v současné době používán řadou centrálních bank a dalších ekonomických institucí k predikcím vývoje ekonomiky a k řízení měnové a fiskální politiky.

> **R** DSGE modely v současnosti nahrazují dříve používané VAR modely. Zatímco VAR modely byly založeny na soustavě ekonometrických rovnic, DSGE modely zpravidla obsahují mikroekonomickou strukturu.

Výhodou mikroekonomické stuktury modelu je rovněž robustnost vůči Lucasově kritice. Lucasova kritika je koncept prosazovaný americkým ekonomem Robertem Lucasem. Lucas používal především (tehdy široce používané) keynesiánské makroekonomické modely, které při predikcích změny ekonomického vývoje nezahrnovaly reakci ekonomických subjektů na tyto změny. Lucas tento koncept demonstroval na Phillipsově křivce, tj. funkci udávající vztah mezi inflací a nezaměstnaností. Dlouhodobě expanzivní monetární politika, která se snaží snížit nezaměstnanost, se ve skutečnosti může ukázat jako neúčinná, protože ekonomické subjekty zahrnují předpoklad budoucí vysoké inflace do svých očekávání a tomuto očekávání pak přizpůsobují i své chování.

> **R** Lucasovu kritiku lze popsat i na následujícím extrémně zjednodušeném příkladě. Uvažujme územní oblast s vysokou úrovní policejní ochrany a nízkou kriminalitou. Jaký bude důsledek snížení rozpočtu politice pro danou oblast? Zločinci pravděpdoboně v této oblasti rozšíří své působení, protože se sníží pravděpodobnost jejich dopadení a potrestání. Tito zločinci tedy aktivně reagují na tuto změnu a přizpůsobují této změně své chování.

4.1 Základní DSGE model

Při konstrukci modelů obvykle rozlišujeme dva pojmy – centralizovaný a decentralizovaný model.

Definice 4.1.1 — Decentralizovaný model. Model s domácnostmi a firmami, které jsou navzájem propojené prostřednictvím explicitně definovaných trhů. Pro rovnováhu v modelu je nutné uvažovat splnění podmínek parciální rovnováhy na jednotlivých trzích.

Decentralizované modely jsou bližší verzi teorie Walrasovy všeobecné rovnováhy tak, jak je vyučovány v základních kurzech mikroekonomie.

Definice 4.1.2 — Centralizovaný model. Pouze jeden reprezentativní subjekt bez explicitního vyjádření trhů.

Decentralizované modely jsou často označovány jako modely s benevolentním diktátorem. Tento diktátor vlastně určuje spotřebu, odvedenou práci, úspory a další rozhodnutí domácnosti, přičemž jediným zájmem tohoto diktátora je maximalizace užitku domácnosti (od toho plyne název benevolentní). Verze modelů s benevolentním diktátorem bývá zpravidla matematicky jednodušší, řešení modelů by mělo být u obou verzí stejné.

R Tímto benevolentním diktátorem tedy v žádném případě není myšlena jakákoli forma totalitního policejního režimu.

Nejprve si popíšeme několik základních pojmů, které se vážou k DSGE modelům.

4.1.1 Stochastické šoky

Významnou součástí DSGE modelů jsou takzvané stochastické šoky. Pomocí těchto stochastických šoků jsou modelovány náhodné veličiny, které na jedné straně ovlivňují ekonomiku, na druhé straně ale nejsou endogenní součástí ekonomického systému a nelze je vysvětlit pomocí ostatních ekonomických veličin. Typickým příkladem těchto veličin jsou technologické šoky, které na jedné straně ovlivňují produktivitu kapitálu i práce a tím i řadu dalších veličin, ale na druhou stranu nejsou pomocí těchto veličin jednoznačně vysvětlitelné. Dalšími příklady náhodných šoků mohou být prudké změny ceny ropy nebo fiskální politika, která často odráží především aktuální politickou situaci.

Pro studium DSGE modelů je potřeba si osvojit především způsob, jakým jsou v modelu zaneseny náhodné šoky. DSGE modely rozšiřují neoklasickou ekonomii o řadu pojmů, které pocházejí především z teorie pravděpodobnosti a ze statistiky.

Začneme s velmi obecnou definicí náhodného procesu.

Definice 4.1.3 — Náhodný (stochastický) proces. Náhodný proces je systém náhodných proměnných a reprezentuje vývoj systému náhodných proměnných v čase.

Tuto abstraktní definici si ukažme na následujícím příkladě. Uvažujme hráče rulety. Hodnota čísla, které padne na ruletě, je náhodná veličina. Sledujeme-li ale celkovou výhru (nebo prohru) jednoho konkrétního hráče v průběhu jeho návštěvy kasína, pak vlastně sledujeme náhodný proces, který v sobě obsahuje náhodnou proměnnou aktuálně padlého čísla a aktuální sázku hráče (která může být např. výsledkem nějaké stochastické strategie). Další náhodnou veličinou je třeba počet pojistných událostí, které musí vyrovnat určitá komerční pojišťovna. Celkový zisk (nebo ztráta) pojišťovny v čase je pak náhodný proces.

Speciálním typem náhodných procesů jsou procesy, které byly formulovány v souvislosti s Box-Jenkinsonovou metodologií.

Definice 4.1.4 — Autoregresivní proces. Autoregresivní náhodný proces je takový náhodný proces, jehož aktuální hodnota je kombinací hodnoty tohoto procesu v minulosti a náhodné veličiny.

Autoregresivní proces prvního řádu si můžeme představit na základě následujícího jednoduchého příkladu: Uvažujme, že se nacházíme v automobilu jedoudím určitou rychlostí po rovné vozovce. Nyní si náhodně vybereme mezi brzdovým a plynovým pedálem a jeden z nich náhodně zvolenou silou sešlápneme. Rychlost vozu za 10 vteřin po této akci závisí jednak na jeho předchozí rychlosti a druhak na zvoleném pedálu a síle, se kterou jsme ho sešlápli.

V RBC modelech reálné šoky (změny produktivity) ovlivňují výstup a úspory, čímž ovlivňují akumulaci kapitálu a tedy ukazují dopady původního šoku způsobem, který je vhodný pro popis krátkodobých fluktuací ekonomiky kolem dlouhodobého trendu - hospodářských cyklů.

4.1.2 Walsrasův aukcionář

Pro kontrukci ekonomického modelu s dobrovolnou tržní směnou je volba typu aukce, která určuje cenu zboží a výrobních faktorů na jednotlivých trzích a objem transakcí, ke kterým dochází.

4.1.3 Základní DSGE model

První dynamický model všeobecné rovnováhy formuloval anglický filosof a matematik Frank Plompton Ramsey v roce 1928.

> R DSGE modely ukazují, že dělení ekonomie na mikroekonomii a makroekonomii je extrémně zavádějící. Jsou to sice modely, které mají mikroekonomický základ v podobě popisu chování reprezentativního spotřebitele, modely se však využívají agregaci velkého množství těchto spotřebitelů a mohou sloužit k modelování vývoje celé ekonomiky.

Ramseyův model byl deterministický, obsahoval však řadu metod a přístupů, které jsou používány dodnes. Naneštěstí Ramsey zemřel rok po vydání svého článku a ten zůstal po řadu let (z několika důvodů) nepochopen. Je paradoxní, že Ramsey formuloval svůj model ke studiu dlouhodobého ekonomického růstu, zatímco DSGE modely jsou používány především pro krátkodobé prognózy (v řádu jednotek let) a ke studiu krátkodobých výkyvů ekonomiky.

V následujícím příkladě si popíšeme a vyřešíme základní DSGE model.

■ **Příklad 4.1** Předpokládejme reprezentativního spotřebitele, který je příjemcem ceny na všech trzích a jehož účelová funkce je:

$$\max_{C,L} \mathbb{E}_t \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k U\left(C_{t+k}, L_{t+k}\right) \tag{4.1}$$

vzhledem k omezení

$$w_{t+k}\left(1-L_{t+k}\right)+r_{t+k}K_{t+k}+\left(1-\delta\right)K_{t+k}=C_{t+k}+K_{t+k+1}\,. \tag{4.2}$$

Reprezentativní spotřebitel tedy maximalizuje očekávanou sumu diskontovaného užitku, závislého na spotřebě a volném čase (celkové množství času je normováno na hodnotu 1). Rozpočtové omezení jemuž je vystavena se skládá z pracovního příjmu $w_t(1-L_t)$, příjmu z vlastnictví kapitálu (kapitálových statků) r_tK_t a z výdajů na spotřebu C_t a z výdajů na nové kapitálové statky (tj. čisté investice) $K_{t+1}-K_t$ a z výdajů na náhradu opotřebovaných kapitálových statků (tj. obnovovací investice) $\delta \cdot K_t$.

R Rozpočtové omezení je možné též interpretovat jako identitu zdrojů produktu (produkt je tvořen výdaji na jeho jednotlivé složky) a užití produktu (odměny za služby jednotlivých výrobních faktorů):

$$\underbrace{\underbrace{K_{t+k+1}-K_{t+k}}_{\text{čisté investice}}+\underbrace{\delta K_{t+k}}_{\text{obnovovací investice}}}_{\text{hrubé (celkové) investice}}+C_{t+k}\equiv$$
$$\underbrace{w_{t+k}(1-L_{t+k})}_{\text{odměna za služby práce}}+\underbrace{r_{t+k}K_{t+k}}_{\text{odměna za služby kapitálu}}$$

Tento zápis předpokládá jednotkovou cenu spotřebního a kapitálového zboží. Cena práce w je tedy odpovídá reálné mzdě a vyjadřuje kolik jednotek vyrobené produkce si může spotřebitel koupit v situaci, když pracuje veškerý svůj disponibilní čas. Nájemní cena kapitálu r (cena služby kapitálu) je reálná úroková míra a vyjadřuje, kolik jednotek vyrobené produkce si může domácnost koupit, když dříve naakumulovala jednu jednotku kapitálu. Řešení získáme např. pomocí Langrangeovy funce.
Definujme Langrangeián takto:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=\mathbb{E}_t\sum_{k=0}^{\infty}\beta^k\{U(C_{t+k},L_{t+k})+\lambda_{t+k}[w_{t+k}(1-L_{t+k})+&\\ +r_{t+k}K_{t+k}+(1-\delta)K_{t+k}-C_{t+k}-K_{t+k+1}]\}&\end{aligned}\tag{4.3}$$

Pro pohodlí uveďme zvlášť rozepsané dva po sobě jdoucí členy pro období $t+k$ a $t+k+1$:

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}=\mathbb{E}_t\{U(C_t,L_t)+\lambda_t[w_t(1-L_t)+r_tK_t+(1-\delta)K_t-C_t-K_{t+1}]+\cdots\\&+\beta^kU(C_{t+k},L_{t+k})+\beta^k\lambda_{t+k}[w_{t+k}(1-L_{t+k})+r_{t+k}K_{t+k}+\\&+(1-\delta)K_{t+k}-C_{t+k}-K_{t+k+1}]+\cdots\\&+\beta^{k+1}U(C_{t+k+1},L_{t+k+1})+\beta^{k+1}\lambda_{t+k+1}[w_{t+k+1}(1-L_{t+k+1})+r_{t+k+1}K_{t+k+1}+\\&\qquad+(1-\delta)K_{t+k+1}-C_{t+k+1}-K_{t+k+2}]+\cdots\}\end{aligned}$$

Podmínky prvního řádu získáme derivací podle všech proměnných C_{t+k}, L_{t+k} a

K_{t+k+1}:

$$\forall C_{t+k}; \forall k \geq 0 : \mathbb{E}_t \beta^k \left[\frac{\partial U(C_{t+k}, L_{t+k})}{\partial C_{t+k}} - \lambda_{t+k} \right] = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial U(C_{t+k}, L_{t+k})}{\partial C_{t+k}} - \lambda_{t+k} = 0 \Longrightarrow \lambda_{t+k} = \frac{\partial U(C_{t+k}, L_{t+k})}{\partial C_{t+k}} \tag{4.4}$$

$$\forall L_{t+k}; \forall k \geq 0 : \mathbb{E}_t \beta^k \left[\frac{\partial U(C_{t+k}, L_{t+k})}{\partial L_{t+k}} - w_{t+k}\lambda_{t+k} \right] = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial U(C_{t+k}, L_{t+k})}{\partial L_{t+k}} - w_{t+k}\lambda_{t+k} = 0 \Longrightarrow \frac{\frac{\partial U(C_{t+k}, L_{t+k})}{\partial L_{t+k}}}{\frac{\partial U(C_{t+k}, L_{t+k})}{\partial C_{t+k}}} = w_{t+k} \tag{4.5}$$

$$\forall K_{t+k+1}; \forall k \geq 0 : \mathbb{E}_t \beta^k [\beta (r_{t+k+1} + 1 - \delta) \lambda_{t+k+1} - \lambda_{t+k}] = 0$$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}_t \beta [(r_{t+k+1} + 1 - \delta) \lambda_{t+k+1}] = \mathbb{E}_t \lambda_{t+k} \tag{4.6}$$

Spojením rovnic 4.4 a 4.6 získáme Eulerovu rovnici:

$$\forall k \geq 0 : \frac{\partial U(C_{t+k}, L_{t+k})}{\partial C_{t+k}} = \mathbb{E}_t \beta (r_{t+k+1} + 1 - \delta) \frac{\partial U(C_{t+k+1}, L_{t+k+1})}{\partial C_{t+k+1}} \tag{4.7}$$

R Derivací podle λ_{t+k} získáme zpět pouze rozpočtové omezení $w_{t+k}(1 - L_{t+k}) + r_{t+k}K_{t+k} + (1 - \delta) K_{t+k} = C_{t+k} + K_{t+k+1}$. Celá formulace úlohy, resp. tato omezující podmínka rozhodování domácností předpokládá nulový zisk firem. Aby toto bylo splněno je nutné, aby produkční funkce 4.9 byla homogenní stupně jedna, tedy vykazovala konstantní výnosy z rozsahu. Potom platí, že veškerý produkt je vyčerpán výrobními faktory $w_{t+k}(1 - L_{t+k}) + r_{t+k}K_{t+k} = Y_{t+k}$ a omezení domácností je pouze jinou interpretací rovnováhy trhu výrobků 4.13. Z tohoto důvodu zde derivaci podle λ_{t+k} neuvádíme.

Její interpretace je jednoduchá: Aby celková suma diskontovaného užitku byla maximální, musí se pro všechny budoucí časové okamžiky marginální užitek v čase $t+k$ rovnat očekávanému užitku v čase $t+k+1$ sníženému o diskontní faktor a zvýšenému o rozdíl výnosu z kapitálu a jeho depreciace. Pokud má být suma diskontovaného užitku skutečně maximální, tak nekonečně malá změna rozhodnutí domácnosti povede ke stejnému výsledku. Domácnost se tedy rozhodne pro snížení své spotřeby v čase $t+k$ o jednu nekonečně malou jednotku, to sníží její celkový dosažený užitek o $\frac{\partial U(C_{t+k}, L_{t+k})}{\partial C_{t+k}}$. Tato nespotřebovaná jednotka se stává kapitálovým statkem, který v dalším období $t+k+1$ přinese čistý výnos $r_{t+k+1} - \delta$. Počet spotřebovaných jednotek je tedy $(r_{t+k+1} + 1 - \delta)$ a stačí ho jen vynásobit diskontovaným marginálním užitkem $\beta \frac{\partial U(C_{t+k+1}, L_{t+k+1})}{\partial C_{t+k+1}}$ a získáme přírůstek užitku v období $t+k+1$. Pokud je počáteční snížení užitku stejné, jako jeho následní zvýšení, znamená to, že původní alokace byla optimální. A to je přesně to co říká Eulerova rovnice 4.7. Toto je jistě podmínka optimality, nicméně jejím předpokladem je reverzibilita kapitálu zpět do spotřeby. Výraz $(r_{t+k+1} + 1 - \delta)$ přesně znamená: jedna dodatečná jednotka kapitálu 1 přinese dodatečnou možnost spotřeby r_{t+k+1} a je zároveň depreciována mírou δ. Do spotřeby tedy vstupuje také ona v dřívějším období nespotřebovaná jednotka kapitálu, což není v rámci formulace modelu možné - viz rovnice 4.2, kde C_{t+k} a K_{t+k} jsou dvě různé proměnné a tedy rozhodnutí odložit spotřebu a vytvořit kapitál znamená vytvoření kapitálu jednou provždy.

Interpretace rovnice (4.5) je též jednoduchá: Domácnost se rozhodne snížit množství volného času o jednu nekonečně malou jednotku, to sníží její užitek o $\frac{\partial U(C_{t+k},L_{t+k})}{\partial L_{t+k}}$. To ale znamená o jednu jednotku práce více, což domácnosti umožní spotřebovat w_{t+k} dodatečných jednotek statků. Tento počet stačí vynásobit marginálním užitek ze spotřeby $\frac{\partial U(C_{t+k},L_{t+k})}{\partial C_{t+k}}$ a získáme přírůstek užitku plynoucí ze zvýšené spotřeby. Pokud je snížení užitku v důsledku menšího množství volného času přesně kompenzováno zvýšením užitku z vyšší spotřeby, byla původní alokace optimální. Rozhodování domácností je popsáno rovnicemi (4.5) a (4.7).

Firmy maximalizují svůj zisk, přičemž jsou prace-takery na všech trzích:

$$\max_{N,K} \left[Y_{t+k} - w_{t+k}N_{t+k} - r_{t+k}K_{t+k}\right] \tag{4.8}$$

vzhledem k produkční funkci

$$Y_{t+k} = F\left(N_{t+k}, K_{t+k}, A_{t+k}\right). \tag{4.9}$$

Rozhodovací problém firem je statický a podmínky prvního řádu vyplývají z derivování funkce zisku:

$$F\left(N_{t+k}, K_{t+k}, A_{t+k}\right) - w_{t+k}N_{t+k} - r_{t+k}K_{t+k} \tag{4.10}$$

podle práce N_{t+k} a kapitálu K_{t+k}.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\cdot)}{\partial N_{t+k}} &= \frac{\partial F\left(N_{t+k}, K_{t+k}, A_{t+k}\right)}{\partial N_{t+k}} - w_{t+k} = 0 \\ &\Longrightarrow \frac{\partial F\left(N_{t+k}, K_{t+k}, A_{t+k}\right)}{\partial N_{t+k}} = w_{t+k} && (4.11) \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial K_{t+k}} &= \frac{\partial F\left(N_{t+k}, K_{t+k}, A_{t+k}\right)}{\partial K_{t+k}} - r_{t+k} = 0 \\ &\Longrightarrow \frac{\partial F\left(N_{t+k}, K_{t+k}, A_{t+k}\right)}{\partial K_{t+k}} = r_{t+k} && (4.12) \end{aligned}$$

Rovnice 4.11 a 4.12 udávají rovnost marginálního produktu příslušného výrobního faktoru a jeho ceny.

Trh výrobků je vyčištěn pokud je všechna vyrobená produkce použita na spotřebu nebo investice (hrubé):

$$Y_{t+k} = C_{t+k} + K_{t+k+1} - (1-\delta)K_{t+k}. \tag{4.13}$$

Trh práce je vyčištěn pokud se množství práce poptávané firmami rovná množství práce nabízené domácnostmi

$$N_{t+k} = 1 - L_{t+k}. \tag{4.14}$$

R Tato rovnice implikuje, že derivace užitkové funkce podle volného času se rovná záporné derivaci užitkové funkce podle práce: $\frac{\partial U(C_{t+k},L_{t+k})}{\partial (L_{t+k})} = -\frac{\partial U(C_{t+k},1-N_{t+k})}{\partial (N_{t+k})}$

Pro daný exogenní proces technologické úrovně A_{t+k}, je rovnováha popsána rovnicemi pro optimální rozhodnování domácností (4.5), (4.7), rovnicemi pro optimální rozhodování firem (4.11), (4.12), produkční funkcí (4.9) a podmínkami rovnováhy na trzích 4.13 a (4.14). Po zjednodušení dostáváme systém pěti rovnic, které popisují optimální trajektorii spotřeby, kapitálu, zaměstnanosti, reálných mezd a reálné úrokové míry:

$$\frac{-\frac{\partial U(C_{t+k},1-N_{t+k})}{\partial (N_{t+k})}}{\frac{\partial U(C_{t+k},1-N_{t+k})}{\partial C_{t+k}}} = w_{t+k} \tag{4.15}$$

$$\frac{\partial U\left(C_{t+k}, 1-N_{t+k}\right)}{\partial C_{t+k}} = \mathbb{E}_t \beta \left(r_{t+k+1} + 1 - \delta\right) \frac{\partial U\left(C_{t+k+1}, 1-N_{t+k+1}\right)}{\partial C_{t+k+1}} \tag{4.16}$$

$$\frac{\partial F\left(N_{t+k}, K_{t+k}, A_{t+k}\right)}{\partial N_{t+k}} = w_{t+k} \tag{4.17}$$

$$\frac{\partial F\left(N_{t+k}, K_{t+k}, A_{t+k}\right)}{\partial K_{t+k}} = r_{t+k} \tag{4.18}$$

$$F\left(N_{t+k}, K_{t+k}, A_{t+k}\right) = C_{t+k} + K_{t+k+1} - (1-\delta)K_{t+k} \tag{4.19}$$

R Velikost produkce lze snadno dopočítat podle produkční funkce (4.9).

Pohodlně můžeme redukovat počet rovnic tím, že eliminujeme reálnou mzdu a reálnou úrokovou míru:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial U\left(C_{t+k}, 1-N_{t+k}\right)}{\partial \left(N_{t+k}\right)} &= \\ = \frac{\partial F\left(N_{t+k}, K_{t+k}, A_{t+k}\right)}{\partial N_{t+k}} \quad \frac{\partial U\left(C_{t+k}, 1-N_{t+k}\right)}{\partial C_{t+k}} & \qquad (4.20) \\ \frac{\partial U\left(C_{t+k}, 1-N_{t+k}\right)}{\partial C_{t+k}} &= \\ = \mathbb{E}_t \beta \left(\frac{\partial F\left(N_{t+k+1}, K_{t+k+1}, A_{t+k+1}\right)}{\partial K_{t+k+1}} + 1 - \delta\right) \frac{\partial U\left(C_{t+k+1}, 1-N_{t+k+1}\right)}{\partial C_{t+k+1}} & \qquad (4.21) \\ F\left(N_{t+k}, K_{t+k}, A_{t+k}\right) = C_{t+k} + K_{t+k+1} - (1-\delta)K_{t+k} & \qquad (4.22) \end{aligned}$$

Tím jsme získali 3 rovnice pro 3 neznámé: C, N, K.

Celou úlohu můžeme reformulovat do podoby ekonomiky jediného subjektu - Robinsona Crusoe. Jeho cílem je maximalizovat užitek při omezení disponibilním časem, produkční funkcí a zákonem pohybu kapitálu:

$$\max_{C,L} \mathbb{E}_t \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k U\left(C_{t+k}, L_{t+k}\right)$$

vzhledem k

$$\begin{aligned} 4.14 : N_{t+k} &= 1 - L_{t+k} \\ 4.9 : Y_{t+k} &= F\left(N_{t+k}, K_{t+k}, A_{t+k}\right) \\ 4.13 : Y_{t+k} &= C_{t+k} + K_{t+k+1} - (1-\delta)K_{t+k} \end{aligned}$$

První omezení lze dosadit do užitkové funkce a další dvě lze spojit v jediné. Tím dostáváme Lagrangeián:

$$\mathscr{L} = \mathbb{E}_t \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \{U(C_{t+k}, 1-N_{t+k}) + \lambda_{t+k}[F(N_{t+k}, K_{t+k}, A_{t+k}) + \\ + (1-\delta) K_{t+k} - C_{t+k} - K_{t+k+1}]\} \tag{4.23}$$

Podmínky prvního řádu získáme derivací podle všech proměnných C_{t+k}, N_{t+k} a K_{t+k+1} a λ_{t+k} a výsledným řešením jsou opět rovnice:

$$4.20: -\frac{\partial U(C_{t+k}, 1-N_{t+k})}{\partial (N_{t+k})} = \\ = \frac{\partial F(N_{t+k}, K_{t+k}, A_{t+k})}{\partial N_{t+k}} \quad \frac{\partial U(C_{t+k}, 1-N_{t+k})}{\partial C_{t+k}}$$

$$4.21: \frac{\partial U(C_{t+k}, 1-N_{t+k})}{\partial C_{t+k}} = \\ = \mathbb{E}_t \beta \left(\frac{\partial F(N_{t+k+1}, K_{t+k+1}, A_{t+k+1})}{\partial K_{t+k+1}} + 1 - \delta \right) \frac{\partial U(C_{t+k+1}, 1-N_{t+k+1})}{\partial C_{t+k+1}}$$

$$4.22: F(N_{t+k}, K_{t+k}, A_{t+k}) = C_{t+k} + K_{t+k+1} - (1-\delta) K_{t+k}$$

Tato možnost redukce původního decentralizovaného modelu na model centralizovaný ukazuje na skutečnost, že v tomto typu modelů se firmy chovají tak, jak chtějí jejich vlastníci. To jsou domácnosti jejichž cílem je maximalizovat užitek a k tomu potřebují získat co největší důchod, tedy maximální zisk firem. Model tedy předpokládá, že firmy sledují cíle svých vlastníků, jinými slovy: firmy jsou řízeny jejich vlastníky. Samozřejmě vlastníci firem jsou vlastníci kapitálu a úroková míra je jejich odměnou. Následující kapitola ukazuje model, který tuto část výrazně modifikuje tím, že vytváří nové subjekty - manažery, kteří sledují cíle podle své užitkové funkce. ■

4.2 Numerické řešení a simulace

Pro ekonomickou internpretaci DSGE modelů je důležité především nalezení stálého stavu neboli steady-state. Steady-state je takový stav ekonomiky, při kterém subjekty nemají tendenci měnit své chování. Stavem eknomiky v tomto smyslu myslíme konkrétní hodnoty endogenních proměnných modelu. Pro větší přehlednost si zaveďme formální definici steady-state.

Definice 4.2.1 — Steady-state (stálý stav). Steady-state jsou takové hodnoty všech endogenních proměnných modelu $x_{1,t}, x_{2,t}, \ldots, x_{n,t}$, pro které by (bez vlivu stochastického šoku) platilo: $x_{1,t} = x_{1,t+1}, x_{2,t} = x_{2,t+1}, \ldots, x_{n,t} = x_{n,t+1}$.

Steady-state lze určit analyticky nebo numericky. K numerickému řešení lze využít zdarma dostupný software Octave a doplněk Dynare.

4.2.1 Model s exogenní nabídkou práce

V modelech s exogenní nabídkou práce uvažujeme, že spotřebitel tráví stále stejné množství disponibilního času prací, to bez ohledu na výši reálné mzdy a další ekonomické veličiny. Tyto modely jsou zpravidla jednodušší, protože v užitkové funkci bývá pouze množství spotřebovaného zboží. Na druhou stranu tyto modely nereflektují řadu ekonomických jevů, především pak změny v míře nezaměstnanosti vyvolané dobrovolnou preferencí volného času spotřebiteli.

Řešení modelů s exogenní nabídkou práce si ukážeme na modelu s neoklasickou užitkovou funkcí a benevolentním diktátorem.

▪ **Příklad 4.2** Uvažujme model s benevolentním diktátorem, který maximalizuje očekávany užitek spotřebitele, který je dán velikostí jeho spotřeby. Benevolentní diktátor tedy řeší problém

$$\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}. \tag{4.24}$$

za podmínky

$$k_{t+1} = a_t \cdot k_t^{\alpha} - c_t + (1-\delta) \cdot k_t\,. \tag{4.25}$$

Uvažujeme exogenní šok, který modelujeme jako autoregrestivní proces prvního řádu, šok je dán rovnicí:

$$\ln a_t = \rho \cdot \ln a_{t-1} + \varepsilon_t \tag{4.26}$$

Opět je potřeba odvodit si podmínky prvního řádu. Sestavíme si Lagrangeovu rovnici:

$$\mathscr{L} = \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \sum_{t=0}^{\infty} \lambda_t \cdot [a_t \cdot k_t^{\alpha} - c_t + (1-\delta) \cdot k_t - k_{t+1}] \tag{4.27}$$

Nejprve si vypočítáme parciální derivace Lagrangeovy rovnice podle spotřeby v čase t a $t+1$, tj. derivujeme podle c_t a c_{t+1}. Parciální derivace položíme rovny nule.

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c_t} = \mathbb{E}_0 \beta^t \frac{c_t^{1-\sigma-1}}{1-\sigma} \cdot (1-\sigma) - \lambda_t = \mathbb{E}_0 \beta^t c_t^{-\sigma} - \lambda_t = 0\,, \tag{4.28}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c_{t+1}} = \mathbb{E}_0 \beta^{t+1} \frac{c_{t+1}^{1-\sigma-1}}{1-\sigma} \cdot (1-\sigma) - \lambda_{t+1} = \mathbb{E}_0 \beta^{t+1} c_{t+1}^{-\sigma} - \lambda_{t+1} = 0\,. \tag{4.29}$$

Z první parciální derivace si můžeme vyjádřit hodnotu Lagrangeova multiplikátoru v čase t jako

$$\lambda_t = \mathbb{E}_0 \beta^t c_t^{-\sigma} \tag{4.30}$$

a z druhé rovnice hodnotu Lagrangeova multiplikátoru v čase $t+1$ jako

$$\lambda_{t+1} = \mathbb{E}_0 \beta^{t+1} c_{t+1}^{-\sigma}\,. \tag{4.31}$$

Nyní si vypočteme parciální derivaci Lagrangeovy rovnice podle k_t. Pro větší názornost si ale nejprve rozepíšeme sumu $\sum_{t=0}^{\infty} \lambda_t \cdot [a_t \cdot k_t^{\alpha} - c_t + (1-\delta) \cdot k_t - k_{t+1}]$.

Klíčová pro nás bude především dvojice po sobě jdoucích členů. Uvažujme nějaké $\tau \in \mathbb{N}$. Pak můžeme sumu rozepsat jako

$$
\begin{aligned}
&\sum_{t=0}^{\infty} \lambda_t \cdot [a_t \cdot k_t^{\alpha} - c_t + (1-\delta) \cdot k_t - k_{t+1}] = \\
&\lambda_0 \cdot [a_0 \cdot k_0^{\alpha} - c_0 + (1-\delta) \cdot k_0 - k_1] + \\
&\lambda_1 \cdot [a_1 \cdot k_1^{\alpha} - c_1 + (1-\delta) \cdot k_1 - k_2] \\
&+ \ldots + \\
&\lambda_{\tau-1} \cdot \left[a_{\tau-1} \cdot k_{\tau-1}^{\alpha} - c_{\tau-1} + (1-\delta) \cdot k_{\tau-1} - k_{\tau}\right] + \\
&\lambda_{\tau} \cdot [a_{\tau} \cdot k_{\tau}^{\alpha} - c_{\tau} + (1-\delta) \cdot k_{\tau} - k_{\tau+1}] + \\
&\qquad \lambda_{\tau+1} \cdot \left[a_{\tau+1} \cdot k_{\tau+1}^{\alpha} - c_{\tau+1} + (1-\delta) \cdot k_{\tau+1} - k_{\tau+2}\right] + \ldots
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

```
var y i k a c;
varexo e;

parameters alpha beta delta rho sigma sigmae;

alpha = 0.33;
beta = 0.99;
delta = 0.025;
rho = 0.95;
sigma = 1;
sigmae = 0.01;

model;

c^(-sigma) = beta*(c(+1)^(-sigma)*(alpha*a(+1)
        *k^(alpha -1) + (1-delta)));
y = a*k(-1)^(alpha);
k = i + (1-delta)*k(-1);
y = c + i;
log(a) = rho*log(a(-1)) + e;
end;

initval;

k = 29;
y = 3;
a = 0;
c = 2.5;
i = 1.5;
end;

shocks;
var e = sigmae^2;
```

```
end;

steady;
stoch_simul(irf=40);
```

■

4.2.2 Model s endogenní nabídkou práce

V modelech s engogenní nabídkou práce uvažujeme, že reprezentativní spotřebitel má možnost volit množství odpracovaného času. V užitkové funkci reprezentativního spotřebitele se tedy vyskytují dvě proměnné: množství volného času (resp. množství odpracovaného času) a množství spotřebovaného zboží.

Reprezentativní spotřebitel tedy čelí následujícímu dilematu: Zvýšení množství odpracovaného času umožní zvýšit množství spotřebovaného zboží, na druhou stranu sníží jeho užitek z volného času. Na druhé straně pokud si chce spotřebitel užít větší množství volného času, musí omezit svoji spotřebu.

■ **Příklad 4.3** Uvažujeme reprezentativního spotřebitele maximalizujícího očekávanou diskontovanou sumu užitků v čase od 0 do nekonečna

$$\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [u(c_t) - \psi \cdot n_t]. \tag{4.33}$$

za podmínky

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta) \cdot k_t = A \cdot e^{z_t} \cdot k_t^{\alpha} \cdot n_t^{1-\alpha}. \tag{4.34}$$

Pro množství odpracovaného času n_t platí, že $n_t \in \langle 0; 1 \rangle$. Technologický šok je dán AR(1) procesem

$$z_t = \rho_z \cdot z_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{4.35}$$

kde $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Přepište model do Dynare a určte steady-state hodnoty pro endogenní proměnné. Uvažujte hodnoty parametrů $\alpha = 0.527$, $\beta = 0.99$, $\delta = 0.01$, $\psi = 1.92$, $\rho = 0.897$, $\sigma = 0.0119$, $A = 1$. Jako výchozí hodnoty pro steady-state použijte např. $k = 9$, $c = 0.9$, $n = 0.3$, $z = 0$, $\varepsilon = 0$. Stavovou proměnnou k zapisujte s posunem o jedno časové období zpět.

Nejdříve sestavíme Lagrangeovu rovnici:

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [u(c_t) - \psi \cdot n_t] + \\ \sum_{t=0}^{\infty} \lambda_t \cdot [A \cdot e^{z_t} \cdot k_t^{\alpha} \cdot n_t^{1-\alpha} - c_t - k_{t+1} + (1-\delta) \cdot k_t]\end{aligned} \tag{4.36}$$

Pro řešení problému spotřebitele derivujeme Lagrangeovu rovnici podle *vhodně zvolených* proměnných a položíme derivaci rovnu 0.

Nejrychlejším a nejefektivnějším způsobem, jak vyřešit tuto úlohu, je derivovat Lagrangeovu rovnici podle proměnných c_t, c_{t+1} a k_{t+1}. Efektivita tohoto způsobu řešení bude zřejmá během řešení.

Začneme derivací podle c_t a položíme ji rovnu nule

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c_t} = \mathbb{E}_0 \beta^t u(c_t) - \lambda_t = 0. \tag{4.37}$$

Z této rovnice zjistíme, že:

$$\lambda_t = \mathbb{E}_0 \beta^t u'(c_t) \tag{4.38}$$

Derivace podle c_{t+1} je analogická

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c_{t+1}} = \mathbb{E}_0 \beta^{t+1} u'(c_{t+1}) - \lambda_{t+1} = 0. \tag{4.39}$$

Opět si vyjádříme příslušný Lagrangeův multiplikátor:

$$\lambda_{t+1} = \mathbb{E}_0 \beta^{t+1} u'(c_{t+1}) \tag{4.40}$$

Nyní máme vyjádřené Lagrangeovy multiplikátory pro dvě bezprostředně následující časová období: t a $t+1$.

Nyní derivujeme Lagrangeovu rovnici podle k_{t+1}

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k_{t+1}} = -\lambda_t + \lambda_{t+1} \cdot \left(A \cdot e^{z_t} \cdot k_{t+1}^{\alpha-1} \cdot \alpha \cdot n_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta\right) = 0 \tag{4.41}$$

Do této rovnice můžeme dosadit za Lagrangeovy multiplikátory λ_t a λ_{t+1}, které jsme si vyjádřili v předchozím kroku. Efektivita našeho postupu bude zřejmá, pokud si provedeme derivaci téže rovnice podle k_t:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial k_t} = -\lambda_{t-1} + \lambda_t \cdot \left(A \cdot e^{z_t} \cdot k_t^{\alpha-1} \cdot \alpha \cdot n_t^{1-\alpha} + 1 - \delta\right) = 0. \tag{4.42}$$

V tomto případě bychom sice mohli dosadit za λ_t, nikoli však za λ_{t-1}.

Provedeme jednoduchou úpravu

$$\lambda_t = \lambda_{t+1} \cdot \left(A \cdot e^{z_t} \cdot k_{t+1}^{\alpha-1} \cdot \alpha \cdot n_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta\right) \tag{4.43}$$

Do této rovnice nyní dosadíme za λ_t a λ_{t+1}:

$$\beta^t u'(c_t) = \beta^{t+1} \mathbb{E}_t u'(c_{t+1}) \cdot \left(A \cdot e^{z_t} \cdot k_{t+1}^{\alpha-1} \cdot \alpha \cdot n_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta\right) \tag{4.44}$$

Jednoduchou úpravou získáme Eulerovu spotřební rovnici:

$$u'(c_t) = \beta \mathbb{E}_t u'(c_{t+1}) \cdot \left(A \cdot e^{z_t} \cdot k_{t+1}^{\alpha-1} \cdot \alpha \cdot n_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta\right) \tag{4.45}$$

V případě této úlohy musíme optimalizovat i množství práce, které spotřebitel odpracuje. Určíme si tedy parciální derivaci Lagrangeovy rovnice podle n_t

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial n_t} = -\beta^t \cdot \psi + \lambda_t \cdot \left[A \cdot e^{z_t} \cdot k_t^{\alpha} \cdot (1-\alpha) \cdot n_t^{-\alpha}\right] = 0 \tag{4.46}$$

a provedeme jednoduché úpravy:

$$\begin{aligned}
\beta^t \cdot \psi &= \mathbb{E}_0 \beta^t u'(c_t) \cdot \left[A \cdot e^{z_t} \cdot k_t^{\alpha} \cdot (1-\alpha) \cdot n_t^{-\alpha}\right] \\
\psi &= u'(c_t) \cdot \left[A \cdot e^{z_t} \cdot k_t^{\alpha} \cdot (1-\alpha) \cdot n_t^{-\alpha}\right]
\end{aligned}$$

Toto je další klíčová rovnice, která nám definuje rovnováhu spotřebitele.

Shrňme si nyní klíčové rovnice našeho modelu:

$$\begin{aligned}
c_t + k_{t+1} - (1-\delta) \cdot k_t &= A \cdot e^{z_t} \cdot k_t^{\alpha} \cdot n_t^{1-\alpha} \\
u'(c_t) &= \beta \mathbb{E}_t u'(c_{t+1}) \cdot \left(A \cdot e^{z_t} \cdot k_{t+1}^{\alpha-1} \cdot \alpha \cdot n_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta\right) \\
\psi &= \mathbb{E}_0 u'(c_t) \cdot \left[A \cdot e^{z_t} \cdot k_t^{\alpha} \cdot (1-\alpha) \cdot n_t^{-\alpha}\right] \\
z_t &= \rho_z \cdot z_{t-1} + \varepsilon_t
\end{aligned}$$

Abychom mohli provést simulaci, zbývá učinit rozhodnutí o konkrétním tvaru užitkové funkce. Uvažujme nyní užitkovou funkci ze spotřeby jako $u(c_t) = \ln c_t$ a dosaďme si ji do našich rovnic:

$$\begin{aligned}
c_t + k_{t+1} - (1-\delta) \cdot k_t &= A \cdot e^{z_t} \cdot k_t^{\alpha} \cdot n_t^{1-\alpha} \\
\frac{1}{c_t} &= \beta \mathbb{E}_t \frac{1}{c_{t+1}} \cdot \left(A \cdot e^{z_t} \cdot k_{t+1}^{\alpha-1} \cdot \alpha \cdot n_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta\right) \\
\psi &= \mathbb{E}_0 \frac{1}{c_t} \cdot \left[A \cdot e^{z_t} \cdot k_t^{\alpha} \cdot (1-\alpha) \cdot n_t^{-\alpha}\right] \\
z_t &= \rho_z \cdot z_{t-1} + \varepsilon_t
\end{aligned}$$

Nyní převedeme rovnice do finálního tvaru, který můžeme přepsat do Dynare:

$$\begin{aligned}
c_t + k_{t+1} - (1-\delta) \cdot k_t &= A \cdot e^{z_t} \cdot k_t^{\alpha} \cdot n_t^{1-\alpha} \\
\frac{1}{c_t} &= \beta \mathbb{E}_t \frac{1}{c_{t+1}} \cdot \left[A \cdot e^{z_t} \cdot \alpha \left(\frac{n_{t+1}}{k_{t+1}}\right)^{1-\alpha} + 1 - \delta\right] \\
\psi &= \frac{1}{c_t} \cdot \left[A \cdot e^{z_t} \cdot \left(\frac{k_t}{n_t}\right)^{\alpha} \cdot (1-\alpha)\right] \\
z_t &= \rho_z \cdot z_{t-1} + \varepsilon_t \,.
\end{aligned}$$

```
var c k n z;
varexo e;
parameters beta psi delta alpha rho sigma A;
alpha = 0.527;
beta = 0.99;
delta = 0.01;
psi = 1.92;
rho = 0.897;
sigma = 0.119;
A = 1;
model;
(1/c) = beta*(1/c(+1))*
```

```
        (1+alpha*A*exp(z(+1))*(n(+1)/k)^(1-alpha)-delta);
psi*c = (1-alpha)*A*exp(z)*((k(-1)/n)^alpha);
c+k-(1-delta)*k(-1) = A*exp(z)*(k(-1))^alpha*(n)^(1-alpha);
z = rho*z(-1)+e;
end;
initval;
k = 200;
c = 0.76;
n = 0.3;
z = 0;
e = 0;
end;
steady(maxit = 10000);
shocks;
var e = sigma^2;
end;
stoch_simul(order = 1, irf=100);
```

■

Books
Articles

5. Bibliography

5.1 Books

5.2 Articles

Index

gradient, 10

Lucasova kritika, 49

Masrshallova úloha, 23

vězňovo dilema, 13, 16