

# Pêndulo de Pohl

Ana Caroline Manso de Carvalho - 15/0116683 e João Augusto Sobral da Silva - 15/0131895  
IF-UnB/ Laboratório de Oscilações, Ondas e Fluidos - Grupo:G1  
(Data: 22 de Março)

Objetivos: Estudo do movimento oscilatório, oscilações livres não amortecidas e amortecidas, e oscilações forçadas e amortecidas.

## INTRODUÇÃO

“Oscilações correspondem a vibrações localizadas. [NUSSENZVEIG.H., 1996.,39]”, desde das oscilações harmônicas simples, sistema conservativo, até as oscilações amortecidas com e sem forçamento, sistemas não conservativos, vários conceitos físicos podem ser observados: frequência angular, o conhecido  $\omega$ , frequência de oscilação, período de oscilação etc.

O Pêndulo de Pohl, objeto de nosso estudo no presente trabalho, relaciona o comportamento de cada um desses conceitos aos diferentes tipos de oscilação. Mas, antes de observarmos seu funcionamento e estrutura, vamos entender a física por trás de cada movimento aqui citado.

### Oscilações Livres sem Amortecimento

Um dos exemplos mais conhecidos de oscilação livre sem amortecimento é o pêndulo, que sofre uma “perturbação” ao ser solto de sua posição de equilíbrio, nesse momento, após ser estabelecida a configuração inicial, ele não está submetido a nenhuma força oscilatória externa.

Assim, o pêndulo simples oscila livremente estabelecendo seu próprio período que é determinado pelos devidos parâmetros que o caracterizam. Sendo assim, vamos observar a Figura 1 que esquematiza as forças atuantes no pêndulo e, a partir disso, determinarmos o seu período e devidas frequências.

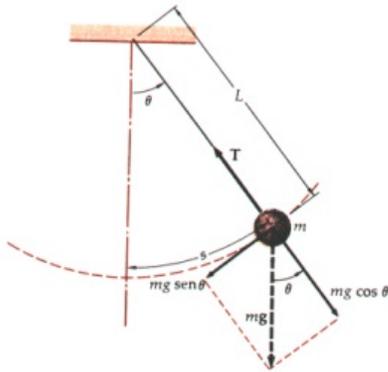


Figura 1. Decomposição de forças em um Pêndulo Simples.

Observe que as forças podem ser decompostas em componentes radiais e tangenciais, respectivamente:

$$ma_r = -mL\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = mg\cos(\theta) - T \quad (1)$$

$$ma_\theta = mL\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) = -mg\sin(\theta) \quad (2)$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{g}{L}\sin(\theta) \quad (3)$$

Como para ângulos suficientemente pequenos temos que:  $\theta \ll 1 \rightarrow \sin(\theta) \approx \theta$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0 \quad (4)$$

A solução geral para esse sistema é dada por :

$$\theta(t) = A_0 + A_1\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}(t - A_3)\right) \quad (5)$$

Onde o período é definido por:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (6)$$

e dessa forma podemos definir a frequência angular de oscilação do sistema:

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{L}{g} \quad (7)$$

### Oscilações Amortecidas

Como já foi dito anteriormente, as oscilações simples - sem amortecimento - são sistemas conservativos. Daqui para frente será feita uma breve introdução as não conservativas, ou seja, as oscilações amortecidas e forçadas.

Para isso, vamos considerar e analisar um oscilador harmônico unidimensional que é descrito pela seguinte equação do movimento, para o caso em que ele oscila livremente :

$$m\ddot{x} = F(x) = -kx \quad (8)$$

Essa equação não leva em consideração a atuação de nenhuma força externa, para isso acontecer seria necessário adicionarmos um outro a expressão:

$$m\ddot{x} = -kx - \rho\dot{x}, \rho > 0 \quad (9)$$

onde  $-\rho\dot{x}$  “representa a resistência dissipativa, que atua em sentido oposto a velocidade ( $\rho > 0$ )” [NUSSENZ-VEIG.H., 1996.,20].

Dividindo ambos os lados por  $m$  :

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (10)$$

onde

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \gamma = \frac{\rho}{m} \quad (11)$$

Usando notação complexa podemos resolver essa EDO linear homogênea de segunda ordem :

$$z(t) = e^{pt} \dot{z} = pz, \ddot{z} = p^2 z \quad (12)$$

Assim,

$$p^2 + \gamma p + \omega_0^2 \quad (13)$$

Resolvendo a equação de segunda ordem, temos:

$$p_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} \quad (14)$$

se  $\gamma/2 < \omega_0$ , o amortecimento é *subcrítico* e temos, então, a raiz quadrada de um número negativo, observe:

$$p_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega, \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \quad (15)$$

Essas análises servem como base para entendermos o amortecimento no pêndulo de Pohl, no caso desse sistema, outras variáveis devem ser levadas em conta, como o torque “ $M_1$ ” gerado pela mola espiral e, “ $M_2$ ”, gerado pelos freios por correntes de Foucault.

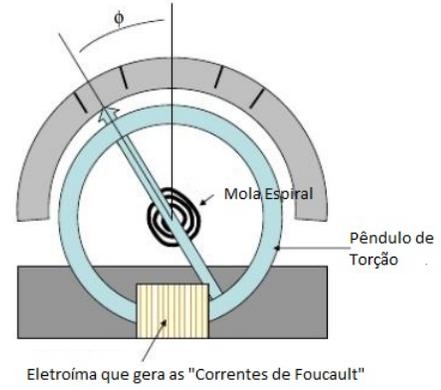


Figura 2. Esquemetação do Pêndulo de Pohl.

Assim, temos que :

$$M_1 = -D^\circ \phi, M_2 = -C\dot{\phi} \quad (16)$$

onde  $\phi$  é o ângulo de torção,  $\dot{\phi}$  = velocidade.

O torque resultante é :

$$M_1 = -D^\circ \phi - C\dot{\phi} \quad (17)$$

o que nos leva a :

$$I\ddot{\phi} + C\dot{\phi} + D^\circ \phi = 0 \quad (18)$$

onde  $I$  = momento de Inércia de pêndulo e  $\ddot{\phi}$  = aceleração angular.

Simplificando a equação e usando os termos  $\delta = C/2I$  e  $\omega_0^2 = D^\circ/I$ , a equação (18) resulta em :

$$\ddot{\phi} + 2\delta\dot{\phi} + \omega_0^2 \phi = 0 \quad (19)$$

segue-se a solução para essa equação diferencial,

$$\phi(t) = \phi_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t) \quad (20)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (21)$$

A partir disso, podemos obter a razão entre duas amplitudes sucessivas, que é dada por :

$$\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} = K = \text{deg } t \quad (22)$$

$$\Lambda = \ln K = \delta T = \ln \frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \quad (23)$$

onde  $K$  é a “razão do amortecimento”,  $T$  o período de oscilação e  $\Lambda$  o decréscimo logarítmico.

### Oscilações Forçadas Amortecidas

Acrescentando uma força dissipativa - no caso do pêndulo de Pohl, uma força magnética - proporcional a velocidade à equação (9), temos que :

$$m\ddot{x} + kx + \rho\dot{x} = F(t) = F_0\cos(\omega t) \quad (24)$$

dividindo ambos os lados por “m” e usando as relações da equação (10) :

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \quad (25)$$

No caso do pêndulo de Pohl temos um torque periódico  $M_a = M_0\cos(\omega t)$ , assim, a equação (19) se torna:

$$\ddot{\phi} + 2\delta\dot{\phi} + \omega_0^2\phi = F_0\cos(\omega_a t) \quad (26)$$

onde

$$F_0 = \frac{M_0}{I} \quad (27)$$

Para o caso estacionário a solução para a equação diferencial é:

$$\phi(t) = \phi_a\cos(\omega_0 t - \alpha) \quad (28)$$

assim, temos que :

$$\phi_a = \frac{\phi_0}{\sqrt{(1 - [\frac{\omega_a}{\omega_0}]^2)^2 + (2\frac{\delta\omega_a}{\omega_0\omega_0})^2}} \quad (29)$$

e

$$\omega_a = \frac{F_0}{\omega_0^2} \quad (30)$$

### LISTA DE MATERIAIS

- Pêndulo de torção de Pohl;
- Transformador variável, 25 VAC/20 VDC, 12 A;
- Ponte retificadora, 30 V AC/DC 1A;
- Cronômetro digital, 1/100 segundos ;
- Multímetro Digital;
- Cabos de ligação;
- Celular Samsung Galaxy J16 (Para as filmagens).

### PROCEDIMENTOS

Para iniciarmos o experimento montamos a estrutura apresentada na Figura (3) conectando a saída DC da fonte ao freio e ao motor do Pêndulo de Pohl. Para variarmos a corrente DC que era fornecida ao freio eletromagnético,  $I_B$ , variávamos o botão de ajuste da fonte de alimentação e observávamos o valor da corrente no Amperímetro. Após esses procedimentos iniciamos a coleta de dados, para isso utilizamos um celular para fazer as filmagens nas diferentes partes do experimento.

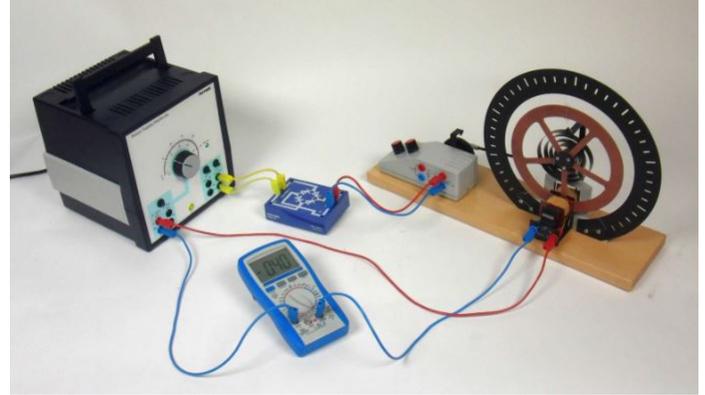


Figura 3. Estrutura utilizada durante o Experimento

Na primeira parte observamos a oscilação livre do Pêndulo de Pohl para o caso não amortecido, sendo assim, não foi necessário a utilização da saída DC. Para fazer o pêndulo oscilar desviamos- o completamente para um lado.

Na segunda parte ligamos a fonte e variamos a tensão nela, para que pudéssemos avaliar as oscilações livres com amortecimento a partir de diferentes valores para a corrente. No caso, 0.25 , 0.40, 0.55 e 0.9 Ampère. A partir das filmagens e com o uso do software *TRACKER* foi possível determinar as respectivas amplitudes.

Na terceira e última parte utilizamos o motor eletromagnético para gerar os forçamentos, em cada parte o motor dava dez voltas ao todo. Assim como na segunda parte, nós variamos a voltagem da fonte DC para fazermos observações quanto as oscilações nesse caso. Também procuramos o valor de ressonância, no qual o pêndulo oscilou na sua amplitude máxima.

### ANÁLISE DE DADOS

#### Oscilações Livres não Amortecidas

Na primeira parte do experimento após a obtenção de dados, um ajuste da forma (5) foi aplicado. O resultado pode ser observado no gráfico da Figura 4.

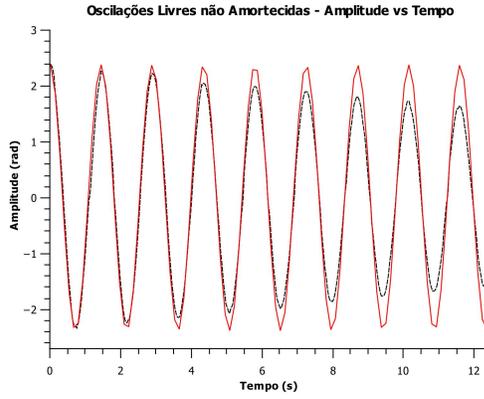


Figura 4. Gráfico do tempo pela amplitude no caso de oscilações livres não amortecidas.

Os valores encontrados para o ajuste do gráfico da Figura 4 foram:

- $A_0 = A_3 = 0$  (s)
- $A_1 = 2,38$  (rad)
- $\omega_0 = 4,33$  (rad/s)

A partir do valor de  $\omega_0$  é possível estimar o período de oscilação utilizando a expressão (7):

$$T_0 = 1,45s \quad (31)$$

É necessário observar que o ajuste da Figura 4 não se adequa bem a partir de 4,5 s devido a dois fatores: um possível erro de paralaxe na filmagem das oscilações pode ter ocasionado uma série de erros concatenados na análise do vídeo, além disso, todo pêndulo real deve ser amortecido de uma forma ou outra, de maneira que a sua amplitude tende a diminuir com o tempo.

### Oscilações Livres Amortecidas

Após a obtenção dos dados referentes aos vídeos da segunda parte, utilizamos um ajuste da forma (20). Os gráficos do tempo pela amplitude e os respectivos parâmetros encontrados pelos ajustes podem ser observados logo abaixo. Os casos de oscilação, a partir das constantes de amortecimento, podem ser classificadas como:

- Subamortecido ( $\delta < 1$ ): O sistema oscila com a amplitude gradualmente decrescendo a zero.
- Criticamente Amortecido ( $\delta = 1$ ): O sistema retorna para o estado estável tão rapidamente quanto possível sem oscilar.
- Superamortecido ( $\delta > 1$ ): O sistema retorna (decai exponencialmente) para o estado estável sem oscilar.

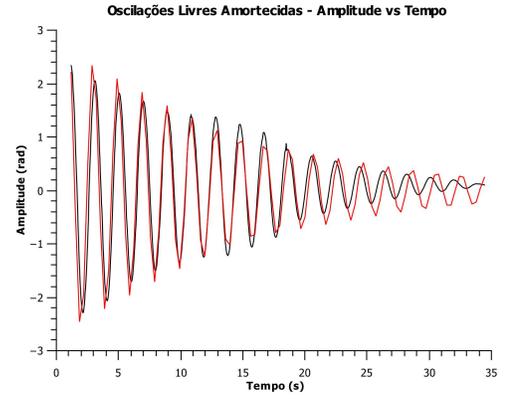


Figura 5. Gráfico do tempo pela amplitude no caso de oscilações livres amortecidas para um amortecimento  $I_B \approx 0.25$  A.

- $\delta = 0,07$  (1/s)
- $\phi_o = -3$  (rad)
- $\omega = 3,18$  (rad/s)

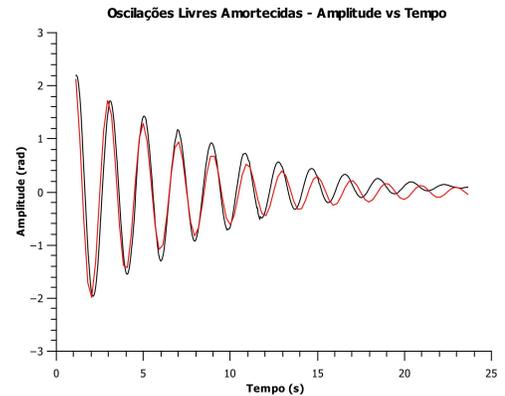


Figura 6. Gráfico do tempo pela amplitude no caso de oscilações livres amortecidas para um amortecimento  $I_B \approx 0.40$  A.

- $\delta = 0,15$  (1/s)
- $\phi_o = -2,71$  (rad)
- $\omega = 3,15$  (rad/s)

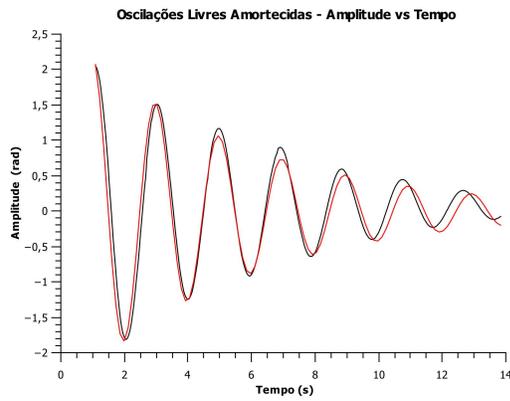


Figura 7. Gráfico do tempo pela amplitude no caso de oscilações livres amortecidas para um amortecimento  $I_B \approx 0.55$  A.

- $\delta = 0,18$  (1/s)
- $\phi_o = -2,65$  (rad)
- $\omega = 3,16$  (rad/s)

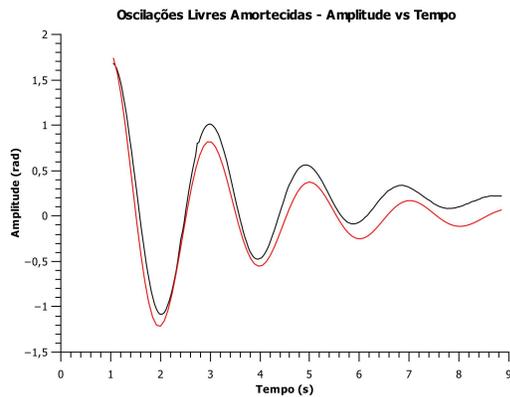


Figura 8. Gráfico do tempo pela amplitude no caso de oscilações livres amortecidas para um amortecimento  $I_B \approx 0.9$  A.

- $\delta = 0,39$  (1/s)
- $\phi_o = -2,66$  (rad)
- $\omega = 3,12$  (rad/s)

Para os quatro casos anteriores,  $\delta$  permanece sempre menor que 1, de forma que confirmamos o comportamento *subamortecido* previsto.

Com o intuito de se analisar os casos para  $\delta$  próximo de 1 e maior que 1, ajustamos a corrente de amortecimento para  $I_B = 2,0$  A e  $I_B = 2,17$  A.

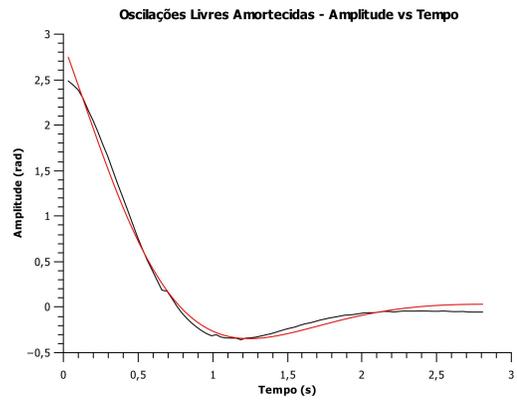


Figura 9. Gráfico do tempo pela amplitude no caso de oscilações livres amortecidas para um amortecimento  $I_B \approx 2.0$  A (Caso não Periódico).

- $\delta = 1,52$  (1/s)
- $\phi_o = 2,89$  (rad)
- $\omega = 2,00$  (rad/s)

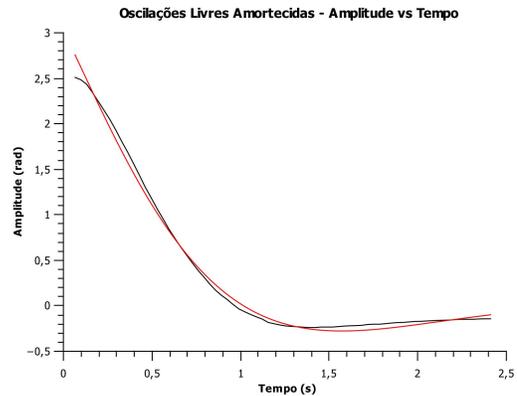


Figura 10. Gráfico do tempo pela amplitude no caso de oscilações livres amortecidas para um amortecimento  $I_B \approx 2.3$  A (*Creeping Case*).

- $\delta = 1,34$  (1/s)
- $\phi_o = 3,03$  (rad)
- $\omega = 1,54$  (rad/s)

Como a corrente máxima permitida pelo transformador era de  $\approx 2,17$  A, a diferença entre o caso da Figura 9 e 10 não é tão visível. Porém, ainda sim, a amplitude no caso próximo do crítico (Figura 10) cai mais rápido do que a do caso superamortecido, por volta de 0,5s.

Utilizando os quatro gráficos obtidos para os casos de amortecimento, foi possível determinar a “razão do amortecimento”,  $K$ , e o decréscimo logarítmico,  $\Lambda$ , como pode ser observado na Tabela 1.

Tabela I. Valores referentes a oscilações amortecidas para diferentes amortecimentos.

$I_B$ (A)	$\delta$ (1/t)	$\omega$ (rad/s)	$K$	$\Lambda$
0.25	0.07	3.18	1,13	0,12
0.40	0.15	3.15	1.20	0.18
0.55	0.18	3.16	1.23	0.26
0.9	0.39	3.12	1.80	0.59

É possível observar que a frequência angular diminui conforme a constante  $K$  aumentou, isso pôde ser observado qualitativamente no momento do experimento, pois quanto maior a corrente, maior foi o amortecimento e menor a frequência de oscilações.

### Oscilações Forçadas e Amortecidas

Após a obtenção de dados, ajustes da forma (28) foram aplicados. Os gráficos do tempo pela amplitude se encontram logo abaixo.

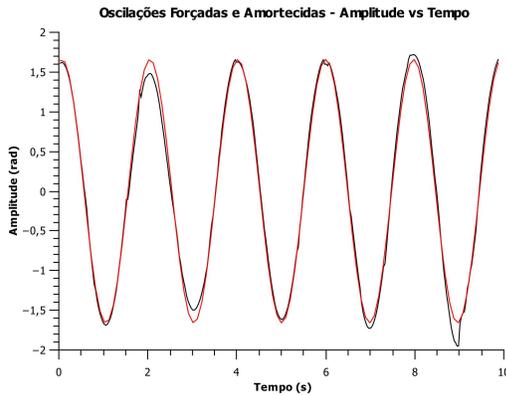


Figura 11. Gráfico do tempo pela amplitude no caso de oscilações forçadas amortecidas para um amortecimento  $I_B \approx 0.25$  A.

- $\alpha = 0,23$  (s)
- $\phi_o = 1,67$  (rad)
- $\omega = 3,18$  (rad/s)
- $\omega_a = 3,17$  (rad/s)

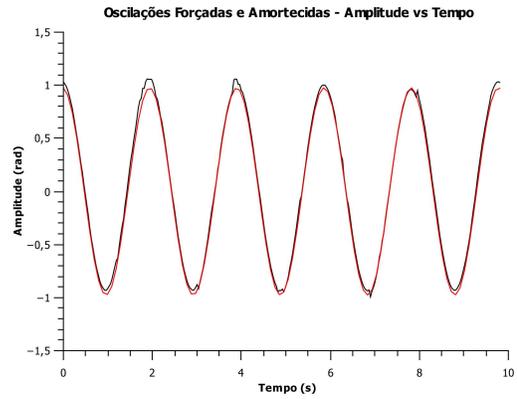


Figura 12. Gráfico do tempo pela amplitude no caso de oscilações forçadas amortecidas para um amortecimento  $I_B \approx 0.45$  A.

- $\alpha = 3,08$  (s)
- $\phi_o = 0,98$  (rad)
- $\omega = 3,21$  (rad/s)
- $\omega_a = 3,20$  (rad/s)

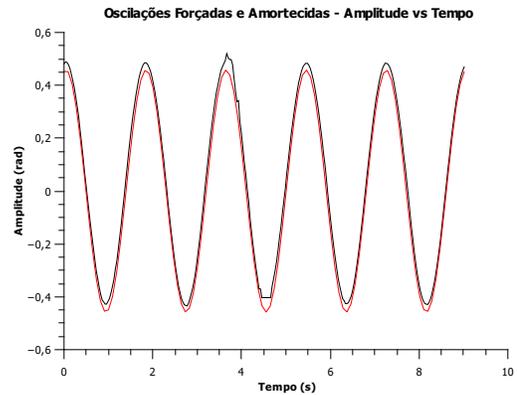


Figura 13. Gráfico do tempo pela amplitude no caso de oscilações forçadas amortecidas para um amortecimento  $I_B \approx 0.55$  A.

- $\alpha = 3,29$  (s)
- $\phi_o = 0,46$  (rad)
- $\omega = 3,48$  (rad/s)
- $\omega_a = 3,47$  (rad/s)

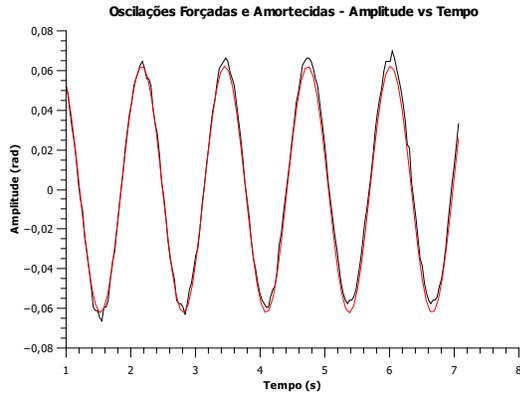


Figura 14. Gráfico do tempo pela amplitude no caso de oscilações forçadas amortecidas para um amortecimento  $I_B \approx 0.9$  A.

- $\alpha = -1,93$  (s)
- $\phi_o = 0,06$  (rad)
- $\omega = 4,90$  (rad/s)
- $\omega_a = 3,47$  (rad/s)

É possível observar para os casos anteriores que as oscilações se comportam graficamente como oscilações livres não amortecidas. Isto acontece, pois o amortecimento fornecido pelo transformador ao pêndulo é compensado pela força fornecida pelo motor. Para observar o caso de ressonância, uma corrente de amortecimento de  $I_B \approx 0,17$  A foi fornecida.

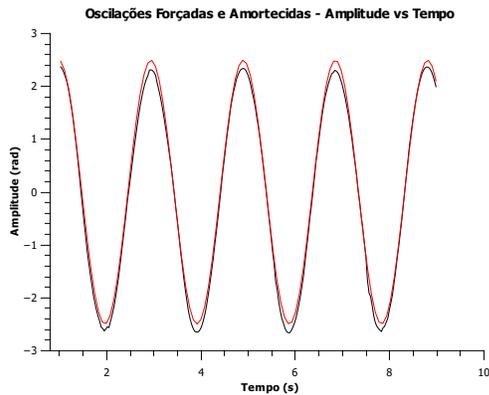


Figura 15. Gráfico do tempo pela amplitude no caso de oscilações forçadas amortecidas para um amortecimento  $I_B \approx 0.17$  A (Ressonância).

- $\alpha = 3,16$  (s)
- $\phi_o = 2,5$  (rad)
- $\omega = 3,213$  (rad/s)
- $\omega_a = 3,218$  (rad/s)

Para os parâmetros encontrados pelo ajuste, é possível verificar a proximidade entre a frequência angular de forçamento e a frequência angular do pêndulo, além disso, é possível observar também a amplitude atingida - por volta de 2,5 rad -, o maior valor encontrado para todos os casos. Ou seja, na ressonância, a amplitude é aumentada de forma considerável e as frequências se tornam muito próximas uma das outras, assim, tanto o motor como o pêndulo oscilam em fase.

Para valores de frequência  $w_a$  acima e abaixo do encontrado para a ressonância, é possível observar uma diferença de fase entre o pêndulo e o motor.

## CONCLUSÃO

Apesar do tratamento estatístico ao longo do relatório ser escasso, devido aos softwares utilizados não fornecerem estes dados referentes às medidas, a maioria dos resultados se encontra dentro do previsto teoricamente. Não obstante, é necessário ter uma maior atenção para o desenvolvimento na seção de *Oscilações Livres Amortecidas* para o caso supercrítico e crítico. A diferença entre estes para que a amplitude se aproximasse de zero foi uma fração mínima, como é possível se observar pelos gráficos das Figuras 9 e 10, quando na verdade, esta deveria ser muito mais acentuada.

Erros de paralaxe na filmagem dos vídeos e a própria corrente de amortecimento fornecida pelo transformador podem ter influenciado diretamente no resultado obtido. Observando o gráfico da Figura 10, por exemplo, confirmamos a previsão, feita na seção de *Oscilações Livres Não Amortecidas*, de possíveis erros sistemáticos na gravação dos vídeos. A medida que a amplitude de oscilação decresce até alcançar o zero, este difere do zero do ajuste por  $\approx 0,22$  rad.

## REFERÊNCIAS

- [1] NUSSENZVEIG, H. MOYSÉS. Fluidos, Oscilações e Ondas. 5ª edição. São Paulo - SP: Edgard Blucher, 2014.