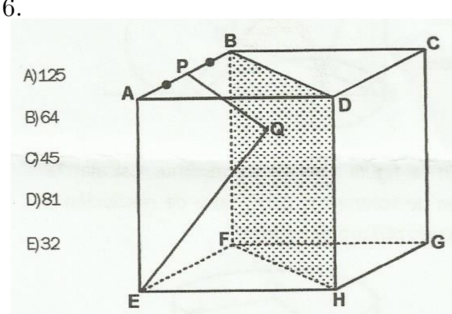
Geometría del Espacio

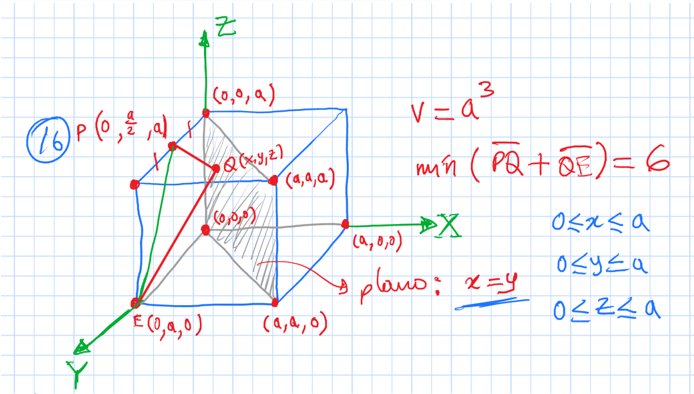
Ing. William Arcaya Carpio, warcayac@gmail.com

7 de noviembre de 2016

1. Volumen de un cubo

Se tiene un cubo ABCD - EFGH. Hallar el volumen del cubo si la mínima distancia de $\overline{PQ} + \overline{QE}$ es 6.





$\overrightarrow{QP} =< -x, \frac{a}{2} - y, a - z >=< -x, \frac{a}{2} - x, a - z >$
$\overline{QP}^2 = x^2 + (\frac{a}{2} - x)^2 + (a - z)^2$
$\overrightarrow{QE} =< -x, a - y, -z >=< -x, a - x, -z >$
$\overline{QE}^2 = x^2 + (a - x)^2 + z^2$

Formulación de la distancia:
$\overline{QP} + \overline{QE} = D = \sqrt{x^2 + (\frac{a}{2} - x)^2 + (a - z)^2} + \sqrt{x^2 + (a - x)^2 + z^2}$

De la gráfica concluimos que x y z son múltiplos de a, por tanto podemos poner ambas variables en función de esta última:
$x = ma$, $z = na$, donde: $0 \leq m, n \leq 1$
Entonces:
$D = \sqrt{(ma)^2 + (\frac{a}{2} - ma)^2 + (a - na)^2} + \sqrt{(ma)^2 + (a - ma)^2 + (na)^2}$
$D = a\left(\sqrt{m^2 + (\frac{1}{2} - m)^2 + (1 - a)^2} + \sqrt{m^2 + (1 - m)^2 + n^2}\right)$
$D = a\left(\sqrt{(2m^2 - 2m + 1 + n^2) + m + \frac{1}{4} - 2n} + \sqrt{2m^2 - 2m + 1 + n^2}\right)$
Reemplazando expresiones por otras variables, y obteniendo sus respectivas derivadas parciales:

$R(m,n) = 2m^2 - 2m + 1 + n^2$
$R'_m = 4m - 2$
$R'_n = 2n$

$T(m,n) = m + \frac{1}{4} - 2n$
$T'_m = 1$
$T'_n = -2$

Entonces:

$$D = a(\sqrt{R+T} + \sqrt{R}) \tag{1}$$

Observamos que D es también un múltiplo de a, entonces hacemos:

$$d(m,n) = \sqrt{R+T} + \sqrt{R} \tag{2}$$

Procedemos a encontrar el mínimo/máximo de la función distancia:

$$d'_m = \frac{R'_m + T'_m}{2\sqrt{R+T}} + \frac{R'_m}{2\sqrt{R}} = \frac{4m-2+1}{2\sqrt{R+T}} + \frac{4m-2}{2\sqrt{R}} = \frac{4m-1}{2\sqrt{R+T}} + \frac{2m-1}{\sqrt{R}} = 0$$

$$\sqrt{\frac{R+T}{R}} = \frac{4m-1}{2(1-2m)} \tag{3}$$

$$d'_n = \frac{R'_n + T'_n}{2\sqrt{R+T}} + \frac{R'_n}{2\sqrt{R}} = \frac{2n-2}{2\sqrt{R+T}} + \frac{2n}{2\sqrt{R}} = \frac{n-1}{2\sqrt{R+T}} + \frac{n}{\sqrt{R}} = 0$$

$$\sqrt{\frac{R+T}{R}} = \frac{1-n}{n} \tag{4}$$

Igualando las ec. (3) y (4), obtenemos:

$$\frac{4m-1}{2(1-2m)} = \frac{1-n}{n} \;\Rightarrow\; n = 2(1-2m) \tag{5}$$

Introduciendo la ec. (5) en el resto de ecuaciones anteriores:

$$R(m) = 2m^2 - 2m + 1 + [2(1-2m)]^2 = 18m^2 - 18m + 5 = 18\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$
$$T(m) = m + \frac{1}{4} - 2[2(1-2m)] = 9m - \frac{15}{4} = 9\left(m - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4}$$

Haciendo $u = m - \frac{1}{2}$ generamos nuevas expresiones, de las cuales obtenemos sus derivadas:

$R(u) = 18u^2 + \frac{1}{2}$
$R' = 36u$

$T(u) = 9u + \frac{3}{4}$
$T' = 9$

Nuevamente calculamos el mínimo/máximo de la distancia con estas nuevas expresiones:

$$d' = \frac{R' + T'}{2\sqrt{R+T}} + \frac{R'}{2\sqrt{R}} = \frac{36u+9}{2\sqrt{R+T}} + \frac{36u}{2\sqrt{R}} = \frac{4u+1}{\sqrt{R+T}} + \frac{4u}{\sqrt{R}} = 0$$
$$\sqrt{\frac{R+T}{R}} = \frac{4u+1}{-4u} \implies \frac{R+T}{R} = \frac{(4u+1)^2}{16u^2}$$

$$(R+T)16u^2 = R(4u+1)^2$$
$$\tfrac{1}{4}(72u^2 + 36u + 5)16u^2 = \tfrac{1}{2}(36u^2+1)(16u^2+8u+1)$$
$$8u^2(72u^2 + 36u + 5) = (36u^2+1)(16u^2+8u+1)$$
$$2^6 3^2 u^4 + 2^5 3^2 u^3 + 2^3 5 u^2 = 2^6 3^2 u^4 + 2^5 3^2 u^3 + 2^2 13 u^2 + 2^3 u + 1$$
$$(2^2 13 - 2^8 5)u^2 + 8u + 1 = 12u^2 + 8u + 1 = (2u+1)(6u+1) = 0$$

Tenemos que: $u = \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right\}$

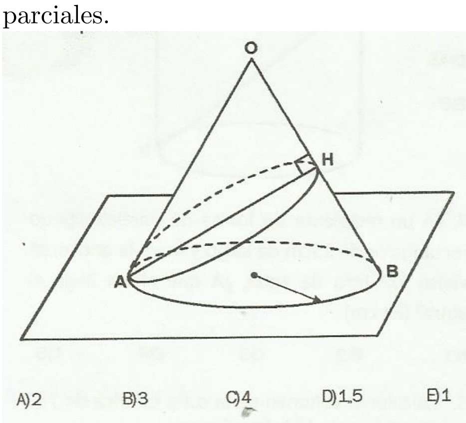
Para determinar el valor de u a emplear, debemos hacer un análisis de rangos:

$$0 \leq n \leq 1$$
$$0 \leq 2(1-2m) \leq 1$$
$$\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{4} \leq u + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$$
$$-\frac{1}{4} \leq u \leq 0$$

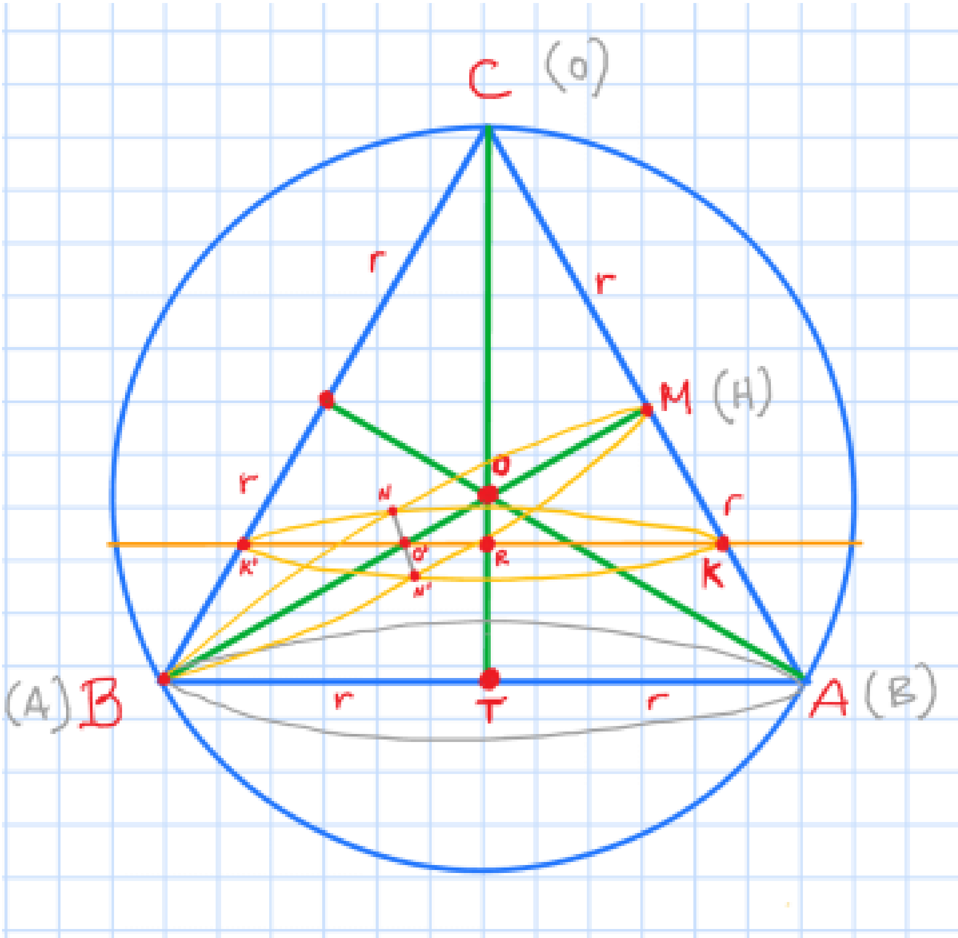
De aquí que: $u = -\dfrac{1}{6} \implies m = \dfrac{1}{3}\ ,\ n = \dfrac{2}{3}$
Por tanto, el extremo relativo de la curva se halla en el punto:
$(x, y, z) = \left(\dfrac{a}{3}, \dfrac{a}{3}, \dfrac{2a}{3}\right)$
Empleamos el método de la segunda derivada para determinar si el extremo relativo es mínimo o máximo:
$d' = \dfrac{4u+1}{\sqrt{R+T}} + \dfrac{4u}{\sqrt{R}}$
$d'' = \dfrac{4}{\sqrt{R+T}} - \dfrac{(4u+1)(R'+T')}{2\sqrt{R+T}^3} + \dfrac{4}{\sqrt{R}} - \dfrac{4uR'}{2\sqrt{R}^3}$
Si: $R(-\frac{1}{6}) = 1\ ,\ R'(-\frac{1}{6}) = -6\ ,\ T(-\frac{1}{6}) = -\frac{3}{4}\ ,\ T'(-\frac{1}{6}) = 9$
Entonces: $d'' = 6$
El resultado fue positivo, lo cual indica que en ese extremo la curva es cóncava hacia arriba, por tanto, el extremo es un **mínimo** relativo.
Conociendo este dato, podemos calcular el valor de la variable d en la ec. (2):
$d = \sqrt{1 - \dfrac{3}{4}} + \sqrt{1} = \dfrac{3}{2}$
El cual si lo reemplazamos en la ec. (1) obtenemos:
$D = a(\dfrac{3}{2})$
Este dato representa la menor distancia posible para $\overline{PQ} + \overline{QE}$, pero por dato del problema sabemos que ello es 6:
$\dfrac{3a}{2} = 6 \implies a = 4$
Finalmente, el volumen del cubo es: $V = 4^3 = \mathbf{64}$

2. Relación entre volúmenes parciales

En la figura se tiene un cono equilátero. Calcular la relación de los volúmenes entre los sólidos parciales.



Para la resolución del problema, se ha visto en la necesidad de renombrar los puntos de la figura original a conveniencia, sin que ello afecte al problema en sí mismo, como se muestra en la figura siguiente.



Es necesario recordar algunos hechos implícitos dados por el problema:

1. En un triángulo equilátero todos sus lados son iguales,
2. Si r es el radio de la base circular del cono equilátero, entonces cada lado del triángulo equilátero transversal al diámetro de la base del cono, medirá $2r$,
3. En un triángulo equilátero, la altura, la bisectriz, la mediana, y la mediatriz a/desde cualquiera de sus vértices son coincidentes,
4. El punto donde se intersecan las tres medianas, el baricentro, se sitúa a $\frac{2}{3}$ de cada vértice,
5. El ángulo interior de un triángulo equilátero es 60º,
6. La base oblicua que se forma al cortar el cono por su altura, como se muestra en la figura, es una sección elíptica.

Del triángulo rectángulo BMC, se conoce que:

- $\overline{BC} = 2r$ y $\overline{MC} = r$
- $\widehat{B} = 30°$ y $\widehat{C} = 60°$

Con todos estos datos podemos calcular valores de segmentos de nuestro interés:

- $\overline{BM} = \sqrt{3}\, r$
- $\overline{BO} = \frac{2}{3}\overline{BM} = \frac{2\sqrt{3}}{3}r = \frac{2}{\sqrt{3}}r$
- $\overline{OM} = \frac{2}{3}\overline{BM} = \frac{1}{\sqrt{3}}r$
- $\overline{BO'} = \frac{1}{2}\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}r$, *radio mayor de la sección elíptica*

- $\overline{OO'} = \overline{BO} - \overline{BO'} = \frac{2}{\sqrt{3}}r - \frac{\sqrt{3}}{2}r = \frac{1}{2\sqrt{3}}r$

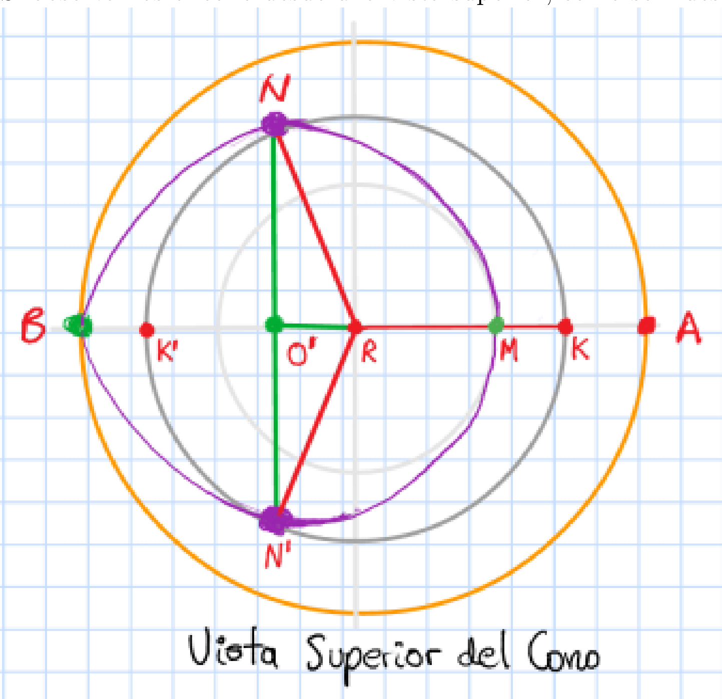
Del triángulo rectángulo ORO' sabemos que $\widehat{O'} = 30°$, entonces podemos obtener los siguientes datos:

- $\overline{O'R} = \frac{1}{4}r$
- $\overline{OR} = \frac{1}{4\sqrt{3}}r$

Para calcular el radio menor de la sección elíptica, nos servimos de la intersección de la sección circular (paralela a la base del cono) en el punto R, y la sección elíptica oblicua (cuyo diámetro mayor es $\overline{BM}$). Esta intersección se da en $\overline{NN'}$ teniendo como punto medio a O', el cual a su vez es el centro de la sección elíptica en referencia (véase anterior figura).
Trabajando con el triángulo rectángulo CRK y conociendo que $\widehat{K} = 60°$, podemos obtener los siguientes datos:

- $\overline{CO} = \overline{BO} = \frac{2}{\sqrt{3}}r$
- $\overline{OR} = \frac{1}{4\sqrt{3}}r$
- $\overline{CR} = \overline{CO} + \overline{OR} = \frac{2}{\sqrt{3}}r + \frac{1}{4\sqrt{3}}r = \frac{3\sqrt{3}}{4}r$
- $\overline{CK} = \frac{3}{2}r$
- $\overline{RK} = \frac{3}{4}r$, *radio de la sección circular en el punto R*

Si observamos el cono desde una vista superior, como se muestra en la siguiente figura,

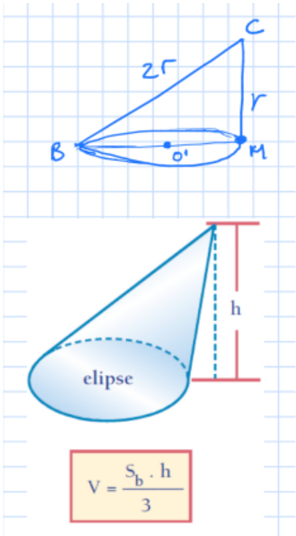


donde la línea de color violeta representa la sección elíptica oblicua, obtenemos los siguientes datos:

- $\overline{RN} = \overline{RN'} = \overline{RK} = \frac{3}{4}r$
- $\overline{O'R} = \frac{1}{4}r$

Aplicando el Teorema de Pitágoras para calcular el cateto $\overline{NO'}$ del triángulo rectángulo NO'R, obtenemos:

$$\overline{NO'} = \sqrt{\overline{NR}^2 - \overline{O'R}^2} = \sqrt{\frac{9}{16}r^2 - \frac{1}{16}r^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}r \text{ , } \textit{radio menor de la sección elíptica}$$



Con los datos recolectados, podemos calcular el volumen del cono oblicuo BCM de base elíptica.

$$S_b = \overline{NO'} \cdot \overline{BO'}\pi = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}r\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)\pi = \frac{\sqrt{6}}{4}r^2\pi$$

$$\Longrightarrow V_1 = \frac{S_b \cdot h}{3} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{4}r^2\pi}{3} = \frac{\pi}{2\sqrt{6}}\ r^3 \approx 0{,}641r^3$$

Volumen del cono regular:

$$S_b = \pi r^2$$

$$\Longrightarrow V_T = \frac{S_b \cdot \overline{BM}}{3} = \frac{(\pi r^2)(\sqrt{3}r)}{3} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\ r^3 \approx 1{,}814r^3$$

Calculando el volumen del cono truncado:

$$V_2 = V_T - V_1 = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\ r^3 - \frac{\pi}{2\sqrt{6}}\ r^3 = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\frac{\pi}{\sqrt{3}}r^3$$

$$V_2 \approx 1{,}173r^3$$

Calculando la proporción entre los volúmenes parciales:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\frac{\pi}{\sqrt{3}}r^3}{\frac{\pi}{2\sqrt{6}}\ r^3} = 2\sqrt{2} - 1 \approx 1{,}828 \qquad \text{ó}$$

$$\frac{V_1}{V_2} \approx 0{,}546$$