EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS (EDP) EM MODELAGEM MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

"Segunda Parte"

ARMAND AZONNAHIN

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

11 de Junho de 2015

Conteúdo

Introduzindo

- Para o Projeto da Estimativa da Qualidade do Ar tivemos que combinar os dois Mecanismos. Obtivemos a Equação de Advecção - Difusão :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U\frac{\partial c}{\partial x} = \kappa\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \tag{1}$$

com a condição inicial

$$c(x, 0) = c_0(x). \tag{2}$$

Introduzindo

- Para o Projeto da Estimativa da Qualidade do Ar tivemos que combinar os dois Mecanismos. Obtivemos a Equação de Advecção - Difusão :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U\frac{\partial c}{\partial x} = \kappa\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \tag{1}$$

  com a condição inicial

$$c(x, 0) = c_0(x). \tag{2}$$

- Note que se fizermos $U = 0$, "desligamos"o Transporte , enquanto que se fizermos $\kappa = 0$, "desligamos"a Difusão .

Introduzindo

- Com esses dois Parâmetros controlamos os dois Mecanismos considerados no Modelo Físico .

Introduzindo

- Com esses dois Parâmetros controlamos os dois Mecanismos considerados no Modelo Físico .
- Nesta segunda parte do nosso Trabalho , vamos usar duas expansões en série de Taylor para fazer as aproximações necessárias para formularmos um Modelo Númerico para a resolução da EDP dada acima .

Resolvendo a EDP

- Usando série de Taylor no tempo,temos que:

$$\frac{\partial c}{\partial t}(j\Delta x, n\Delta t) = \frac{c(j\Delta x,(n+1)\Delta t)-c(j\Delta x,n\Delta t)}{\Delta t} = \frac{c_j^{n+1}-c_j^n}{\Delta t}$$

Resolvendo a EDP

- Usando série de Taylor no tempo,temos que:

$$\frac{\partial c}{\partial t}(j\Delta x, n\Delta t) = \frac{c(j\Delta x,(n+1)\Delta t) - c(j\Delta x, n\Delta t)}{\Delta t} = \frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\Delta t}$$

- enquanto que no espaço:

$$\frac{\partial c}{\partial x}(j\Delta x, n\Delta t) = \frac{c(j\Delta x, n\Delta t) - c((j-1)\Delta x, n\Delta t)}{\Delta x} = \frac{c_j^n - c_{j-1}^n}{\Delta x}$$

Resolvendo a EDP

- Agora usando duas séries de Taylor (uma para frente e outra para trás) podemos escrever que:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(j\Delta x, n\Delta t) = \frac{1}{\Delta x^2}(c_{j+1}^n - 2c_j^n + c_{j-1}^n) \qquad (3)$$

Resolvendo a EDP

- Agora usando duas séries de Taylor (uma para frente e outra para trás) podemos escrever que:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(j\Delta x, n\Delta t) = \frac{1}{\Delta x^2}(c_{j+1}^n - 2c_j^n + c_{j-1}^n) \qquad (3)$$

- Usando estas aproximações na equação de advecção-difusão obtemos:

$$c_j^{n+1} = c_j^n - \frac{U\Delta t}{\Delta x}(c_j^n - c_{j-1}^n) + \kappa \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(c_{j+1}^n - 2c_j^n + c_{j-1}^n). \qquad (4)$$

Resolvendo a EDP

- Este é o Modelo Numérico (Explícito) !
- Façamos alguns experimentos numéricos para testar e nos sentirmos mais confiantes com respeito ao código escrito.

Primeiro Experimento

- No primeiro experimento desligamos a difusão (colocando $\kappa = 0$) e testamos apenas a parte de transporte.Usamos como dados $U = 1$ e $\Delta t = \Delta x = 0,1$; a concentração inicial do poluente é $\alpha = 1,0$. Neste exemplo,adotamos para pontos extremos da nuvem $x = 1$ e $x = 2$,respectivamente.
- Note que o espaçamento espacial e temporal é tal que não violamos a condição CFL. O resultado pode ser visto no gráfico. Na verdade, estamos usando a relação ótima, no sentido em que a velocidade numérica é igual à velocidade de transporte U.

Segundo Experimento

- Façamos agora um teste no qual a velocidade numérica é duas vezes maior do que U, para percebermos (graficamente) que neste caso ocorre um mecanismo (espúrio) de difusão numérica.
- Este experimento ilustra o que chamamos de um **Fenômeno Numérico Espúrio,pois este Fenômeno não é legítimo do modelo estudado.**

Terceiro Experimento

- Apresentamos agora um exemplo no qual temos um pouco de difusão: o valor adotado é $\kappa = 0,1$. Os outros dados são idênticos aos do experimento anterior. O que vemos agora é um exemplo de instabilidade numérica.
- O pulso quadrado foi completamente degradado pelo crescimento exponencial de componentes do erro de arredondamento. Note que no intervalo de tempo considerado, o crescimento levou alguns pontos da solução a ficarem da ordem de 10^{19}. No jargão do matemático computacional, dizemos que a solução numérica "explodiu"!

Método de Crank-Nicolson

- Para melhorar a solução numérica, a boa alternativa é usar um método implícito do tipo Crank-Nicolson que, pode-se mostrar, é incondicionalmente estável. Em outras palavras, temos que escolher o passo no tempo usando apenas um critério de precisão, e não um de estabilidade.

Método de Crank-Nicolson

- Para melhorar a solução numérica, a boa alternativa é usar um método implícito do tipo Crank-Nicolson que, pode-se mostrar, é incondicionalmente estável. Em outras palavras, temos que escolher o passo no tempo usando apenas um critério de precisão, e não um de estabilidade.
- O método implícito é dado por:

$$c_j^{n+1} = c_j^n - \frac{U\Delta t}{\Delta x}(c_j^n - c_{j-1}^n) + \kappa\frac{\Delta t}{\Delta x^2}[\tfrac{1}{2}(c_{j+1}^{n+1} - 2c_j^{n+1} + c_{j-1}^{n+1}) + \tfrac{1}{2}(c_{j+1}^n - 2c_j^n + c_{j-1}^n)]\ .$$

Método de Crank-Nicolson

- Dentro da metodologia de depuração e validação de um código, iniciamos os experimentos com o método implícito testando **exatamente a parte nova do esquema numérico. Para isso desligamos o transporte, fazendo $U = 0$. Assim, testamos apenas a parte de difusão e, consequentemente, o Método de Crank-Nicolson.**
- **Isto pode ser visto no gráfico, onde usamos $\kappa = 0,3$. Note que a concentração vai baixando gradativamente mas a nuvem não se move. Note também que a nuvem vai se espalhando.**

Método de Crank-Nicolson

- Agora ligamos o transporte (vento) e apresentamos a evolução da solução numérica no caso em que $U = 1, \kappa = 0,3, \Delta x = 0,1, \Delta t = 0,05$ e a nuvem começando em $x = 1$ e terminando em $x = 2$.
- Conforme a onda (neste caso a nuvem) propaga para a direita vemos o efeito da difusão. A concentração máxima baixa de 1 para aproximadamente $0,25$ e a nuvem ocupa uma área muito maior.

Concluindo

- Note que a concentração de poluente baixou em 75%! Agora seria o momento de consultar um especialista em Engenharia Ambiental para saber se essa queda de concentração do dito poluente está num nível satisfatório ou não.
- Na figura a seguir mostramos uma representação tridimensional da evolução da nuvem.

Referências

- André, N. e Esteban ,T.,(1997),21°Colóquio Brasileiro de Matemática , IMPA,Rio de Janeiro.
- Friedman,A. and Littman,W.(1994),Industrial Mathematics,A Course in Solving Real-World Problems, SIAM.
- Hirsh,M.W. and Smale,S. (1974), Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra, Academic Press.

Agradecimentos

Obrigado pela Atenção !